Chapitre 1

Minimisation d'une fonction numérique : existence et unicité

L'objectif du chapitre est de traiter de la question de l'existence et de l'unicité du problème fondamental de l'optimisation à savoir le calcul des extrema

(min) $\exists a \in U$ t.q. $f(a) = \inf_{x \in U} f(x)$

où f est une fonction numérique définie sur une partie U de $\mathbb{R}^n$.

On a un énoncé semblable pour la recherche d'un maximum

max $\exists b \in U$ t.q. $f(b) = \sup_{x \in U} f(x)$

Dans ce chapitre, nous allons montrer l'existence et l'unicité des problèmes (min) et (max) sous des hypothèses très générales.

1.1 Définitions et notations

- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{d \text{ fois}}$
- $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}$ norme euclidienne
- $x \cdot y = (x, y) = \sum x_i y_i$ produit scalaire euclidien
- distance entre 2 pts
  $d(x, y) = \|x - y\|$

- Boules dans $\mathbb{R}^d$

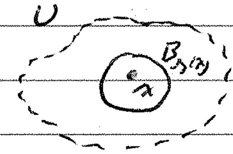
  - ouverte : $B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^d \mid \|y-x\| < r \}$

  - fermée : $\overline{B_r(x)} = \{ y \in \mathbb{R}^d \mid \|y-x\| \leq r \}$

- Ensemble ouvert

  $U \subset \mathbb{R}^d$ est dit ouvert si

  $\forall x \in U \ \exists B_r(x)$ t.q. $x \in B_r(x) \subset U$



On a que :

1) $\{U_i\}_{i \in I}$ collection d'ouverts $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i$ ouvert

2) $\{U_i\}_{i=1}^{m}$ ouverts $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{m} U_i$ ouvert

3) $\mathbb{R}^d$ et $\emptyset$ sont ouverts

- Ensemble fermé

  $F \subset \mathbb{R}^d$ est dit fermé si $\mathbb{R}^d \setminus F = F^c$ est ouvert

On a que :

1) $\{F_i\}_{i \in I}$ collection de fermés $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i$ fermé

2) $\{F_i\}_{i=1}^{m}$ fermés $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{m} F_i$ fermé

3) $\mathbb{R}^d$ et $\emptyset$ sont fermés

1.2 Suite et limite

Soit $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de points de $\mathbb{R}^d$

Définition: <u>limite</u>

On dit que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

ou $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

si:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon > 0 \quad t.q. \quad x_n \in B_\varepsilon(x) \quad \forall n \geq N_\varepsilon$

Ci " A partir d'un certain rang, toute la suite est entièrement contenue dans la boule $B_\varepsilon(x)$ "

Propriété des limites (cas $d=1$)

1. $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$

2. $\lim_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

3. $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n$

4. $\lim_{n\to\infty} x_n / y_n = \dfrac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$

si $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$

5. Si $x_n \leq y_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$

Définition : suite bornée

$\{x_n\}$ est borné si $\exists M > 0$ t.q. $\|x_n\| \leq M \ \forall n$

Critère de fermeture

$F \subset \mathbb{R}^d$ est fermé

$\Leftrightarrow$

$\forall x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$ et $x_n \in F \ \forall n$

$\Rightarrow x \in F$

Ex : $]0,1]$ n'est pas fermé

car la suite $1/n \in]0,1]$ et $1/n \to 0$

mais $0 \notin]0,1]$

par contre $[0,1]$ est fermé.

Définition d'une sous-suite

Soit $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ une suite strictement croissante d'indices

$n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \ldots$

La suite $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ s'appelle une sous-suite de $\{x_n\}$

Ex : Suite : $1, \ 1/2, \ 1/3, \ 1/4, \ 1/5, \ 1/6, \ 1/7, \ 1/8, \ \ldots$

Sous-suite : $\frac{1}{2}, \ 1/4, \ 1/6, \ 1/8, \ 1/10, \ \ldots$

Propriété :

Si $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x \Rightarrow$ toutes les sous-suites convergent vers x

$x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x$

Propriété fondamentale de $\mathbb{R}^d$ (Bolzano-Weierstrass)

Toute suite bornée dans $\mathbb{R}^d$ admet une sous-suite qui converge vers un point x de $\mathbb{R}^d$

$\{x_n\}$ une suite bornée

$\Rightarrow \exists \; x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$

Remarque: si F est une partie fermée et bornée et $x_n \in F \Rightarrow$ le point limite $x \in F$ (pt d'accumulation)

Exemples:

1) la suite bornée $x_n = (-1)^n(1-1/n)$ ne converge pas mais elle admet la sous-suite

$$x_{2k} = 1 - 1/_{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$$

2) la suite $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée dans $\mathbb{R}$

donc admet une sous-suite convergente. mais vers quoi!

3) la suite $\{(\sin n, \cos n)\}_{n=1}^{\infty}$ dans $\mathbb{R}^2$

est bornée $\Rightarrow$ admet une sous-suite convergente

1.3 Continuité

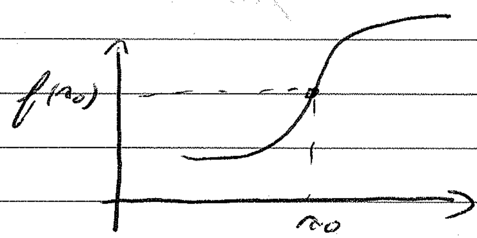
Soit f une fonction numérique définie sur une partie U de $\mathbb{R}^N$. Prenons un pt $x_0 \in U$.

Définition : continuité en x_0

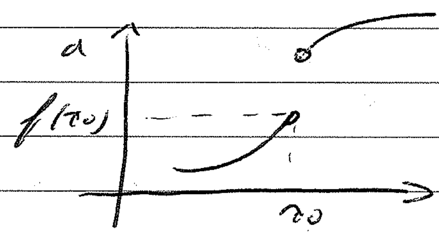
On dira que f est continue en x_0 si

$$\forall x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x_0 \text{ et } x_n \in U \implies f(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(x_0)$$

Plus généralement, on dira que f est continue dans U si elle est continue $\forall x_0 \in U$.



continue en x_0



$x_n < x_0,\ x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to f(x_0)$

$x_n > x_0,\ x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to a \neq f(x_0)$

pas continue en x_0

Propriétés :

1. f et g continues $\implies f+g$ continue
2. f continue, $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda f$ continue
3. f, g continue $\implies$ $f \cdot g$, f/g continue

si $1/g$ existe

f continue

4. Si I est un ouvert de $\mathbb{R}$ (exemple intervalles ouverts $]a,b[$ $]a,\infty[$, $]-\infty,a[$)

$\Rightarrow$ $f^{-1}(I) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in I\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

5. Si I est un fermé de $\mathbb{R}$
$I = [a,b]$ ou $[a,\infty[$, $]-\infty,a]$

$f^{-1}(I) \subset \mathbb{R}^d$ est fermé dans $\mathbb{R}^d$

1.4 Existence des extrema

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur une partie U de $\mathbb{R}^n$.

Par construction des nombres réels, l'ensemble

$$\{ f(x) \mid x \in U \}$$

admet une borne inférieure α, i.e. la plus grande valeur vérifiant

$$\alpha \leq f(x) \qquad \forall x \in U$$

On note cette borne inférieure par

$$\alpha = \inf_{x \in U} f(x)$$

A priori, cette valeur pourrait être $-\infty$.
Voici une caractérisation de l'infimum

i) $\alpha = \inf_{x \in U} f(x) > -\infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists x \in U \quad \text{t.q.} \quad f(x) < \alpha + \varepsilon$$

ii) $\alpha = \inf_{x \in U} f(x) = -\infty$

$$\forall N > 0 \quad \exists x \in U \quad \text{t.q.} \quad f(x) < -N$$

De même, on peut définir le concept de supremum qui est la plus petite valeur β vérifiant

$$f(x) \leq \beta \qquad \forall x \in U$$

et qui est noté par
$$\beta = \sup_{x \in U} f(x)$$

Le problème de l'existence des extrema de f consiste à déterminer $a, b \in U$ vérifiant

$$f(a) = \inf_{x \in U} f(x) \qquad (\min)$$

et

$$f(b) = \sup_{x \in U} f(x) \qquad (\max)$$

<u>Notation</u>

On écrit souvent

$$f(a) = \min_{x \in U} f(x) \quad \text{au lieu de} \quad f(a) = \inf_{x \in U} f(x)$$

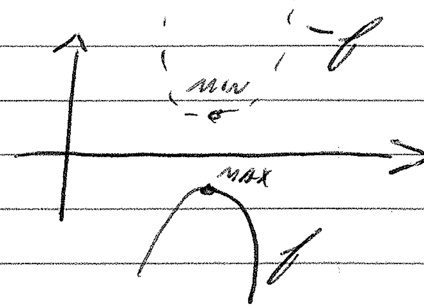
de même pour

$$f(b) = \max_{x \in U} f(x) \quad \text{au lieu de } f(b) = \sup_{x \in U} f(x)$$

<u>Remarque très importante</u>.

On a la relation suivante

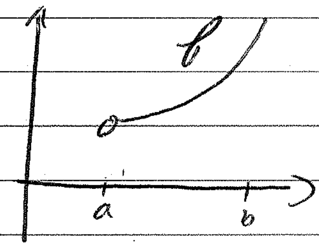
$$\max_{x \in U} f(x) = - \min_{x \in U} (-f)(x)$$



Cette remarque montre qu'il suffit d'étudier seulement le cas des problèmes de minimisation.

Dans ce qui suit, nous allons énoncer un théorème très général sur l'existence des minima (maxima)

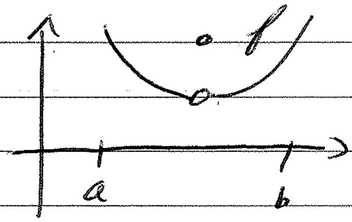
Voici quelques contre-exemples qui justifient les hypothèses sur le domaine U et la fonction $f : U \to \mathbb{R}$.



$U =]a, b]$ pas fermé

f continue

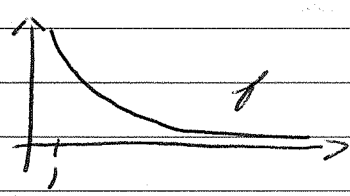
f n'admet pas de minimum



$U = [a, b]$ fermé, borné

f discontinue

f n'admet pas de minimum



$U = [1, \infty[$ fermé, pas borné

$f(x) = 1/x$ continue

f n'admet pas de minimum

Théorème d'existence des extrema (Weierstrass)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction numérique <u>continue</u> définie sur un domaine U <u>fermé</u> et <u>borné</u> de $\mathbb{R}$; alors

i) $\exists\, a \in U$ t.q. $f(a) = \inf_{x \in U} f(x)$

ii) $\exists\, b \in U$ t.q. $f(b) = \sup_{x \in U} f(x)$

Preuve de i) seulement. Le cas ii) est semblable.

Supposons $\alpha = \inf_{x \in U} f(x) > -\infty$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in U \quad t.q. \quad f(x_\varepsilon) < \alpha + \varepsilon$

En particulier, $\varepsilon = 1/N$

$$\Rightarrow \exists x_N \in U \quad t.q. \quad f(x_N) < \alpha + 1/N$$

Or la suite $\{x_N\}_{N=1}^{\infty}$ est bornée car U est borné.
Le théorème de Bolzano-Weierstrass implique l'existence d'une sous-suite convergente

$$x_{N_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} a$$

U est fermé $\Rightarrow$ par le critère de fermeture, $a \in U$.

$$f(x_{N_k}) < \alpha + \frac{1}{N_k}$$

car f est continue $\downarrow \qquad k \to \infty$

$$f(a) \leq \alpha + 0$$

Or $\quad \alpha \leq f(a) \quad$ car α est l'infimum

$$\Rightarrow \quad f(a) = \alpha = \inf_{x \in U} f(x)$$

Pour conclure, montrons que la situation

$$\inf f(x) = -\infty$$

est impossible.
En effet,

$$\forall N > 0 \quad \exists x_N \in U \quad t.q. \quad f(x_N) < -N$$

Donc, il existe une sous-suite $x_{\nu_k} \to a \in U$

$$\Rightarrow f(x_{\nu_k}) \longrightarrow f(a)$$

$\Rightarrow$ la suite $\{f(x_{\nu_k})\}_{k=1}^{\infty}$ doit être bornée mais

$$f(x_{\nu_k}) < -\nu_k \longrightarrow -\infty$$

ce qui montre que $f(x_{\nu_k})$ n'est pas bornée inférieurement. Contradiction.

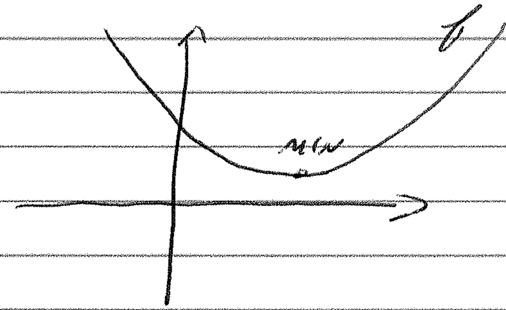
Remarques : 1) si $f : U \to \mathbb{R}$ est continue
$\Rightarrow -f$ est aussi continue

D'après la remarque, on a existence d'un pt $b \in U$ t.q.
$$f(b) = \sup_{x \in U} f(x)$$

2) Le théorème ne nous renseigne pas sur le nombre de points minimisants ou si le point minimisant est situé à l'intérieur de U ou sur sa frontière.

Le théorème d'existence des extrema ne couvre pas le cas (très important en pratique) où le domaine U n'est pas borné

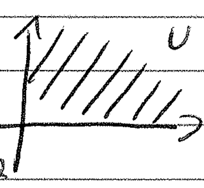
Exemple:



$U = \mathbb{R}$

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ définie sur un domaine $U \subset \mathbb{R}^N$ fermé mais pas borné.

Ex.: • $U = [1, \infty[\;\subset \mathbb{R}$

• 

$U = \left\{ (x_1, x_2) \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{matrix} \right\}$

• $U = \mathbb{R}^2$

Pour obtenir existence des extrema, il suffit d'exiger

$\exists\, K \in \mathbb{R}$ t.q. $f^{-1}(-\infty, K] = \{ x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \leq K \}$ soit borné et $\neq \emptyset$

On dit qu'une telle fonction est à section inférieure bornée.

Il est clair que si $f^{-1}(-\infty, K] \neq \emptyset$, il suffit de rechercher le minimum uniquement dans $f^{-1}(-\infty, K]$ et U.

On a la relation

$$\inf_{x \in U} f(x) = \inf_{x \in U \cap f^{-1}(-\infty, K]} f(x)$$

pour une fonction f à section inf. bornée.

Or $f^{-1}(-\infty, K]$ est fermé car f est continue

$\Rightarrow$ $U \cap f^{-1}(-\infty, K]$ est fermé.

De plus, $f^{-1}(-\infty, K]$ est borné

$\Rightarrow$ $U \cap f^{-1}(-\infty, K]$ est borné

Par conséquent, on peut appliquer le théorème de Weierstrass sur $U \cap f^{-1}(-\infty, K]$.

Théorème d'existence (cas U non borné)

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction continue à section inférieure bornée et définie sur un domaine U fermé, alors

i) $\exists a \in U$ t.q. $f(a) = \inf_{x \in U} f(x)$

Comment savoir si f est à section inf. bornée.
Il existe plusieurs critères. En voici un qui est largement utilisé.

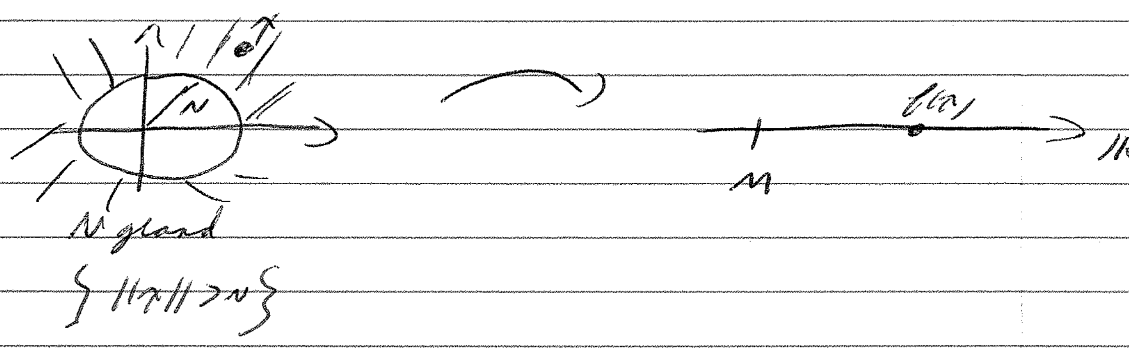
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ définie sur un domaine U fermé mais pas borné.

Définition: f est dite coercive si

$$\lim_{\substack{\|x\| \to \infty \\ x \in U}} f(x) = \infty$$

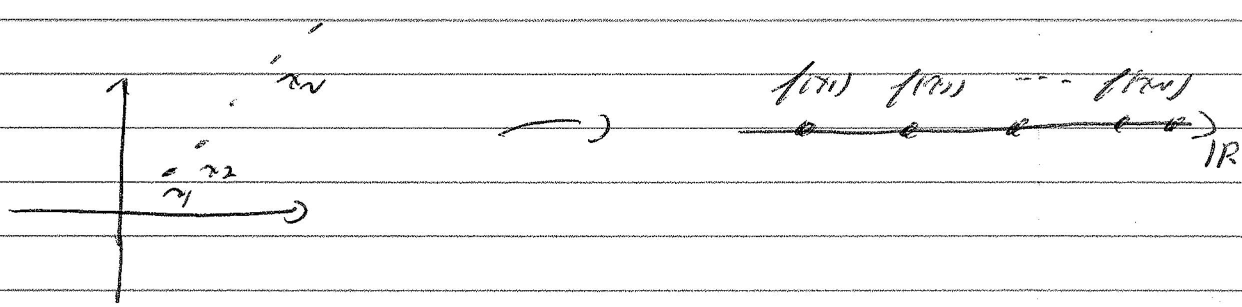
Cette écriture est équivalente aux énoncés :

• $\forall M > 0 \quad \exists N > 0$ t.q. $\|x\| > N \Rightarrow f(x) > M$



• $\forall\, x_n \in U$ et $\|x_n\| \to \infty$

$$\Rightarrow f(x_n) \to \infty$$



Montrons qu'une fonction coercive est nécessairement à section inférieure bornée.

En effet, choisissons un $k > 0$ t.q. $f^{-1}(-\infty, k]$ est non vide. Prouvons que

$$f^{-1}(-\infty, k] \text{ est bien borné.}$$

Supposons le contraire.

$$\exists\, x_n \in f^{-1}(-\infty, k] \quad \text{t.q.} \quad \|x_n\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$$

$$\Rightarrow \quad f(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty \quad \text{car } f \text{ est coercive}$$

$$\text{mais} \quad f^{-1}(x_n) \leq k \quad \text{ce qui est impossible.}$$

Exemples:

1. $f(x) = \|x\|$ est coercive

2. Soit A une matrice symétrique définie positive On note $A > 0$.

$$f(x) = (Ax, x) \text{ est coercive}$$

En effet, le quotient défini sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$R_A(x) = \frac{(Ax, x)}{(x, x)} > 0 \quad (\text{car } A > 0)$$

admet un minimum. Etant donné que $R_A(\lambda x) = R_A(x)$ $\forall \lambda \neq 0$

il suffit de choisir $U = \{x \mid \|x\| = 1\}$ qui est un ensemble fermé et borné. Donc, selon le théorème de Weierstrass, il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$\alpha \leq \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \quad \forall x \neq 0$$

Par conséquent, on a la relation

$$\alpha \|x\|^2 \leq (Ax, x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

d'où la coercivité de f.

3. Toujours avec l'hypothèse que A est définie-positive (+ symétrie), la fonction quadratique

$$f(x) = (Ax, x) - (b, x) \qquad \text{où } b \in \mathbb{R}^n$$

est coercive.

selon 2,

$$f(x) \geq \alpha \|x\|^2 - (b, x)$$

$$f(x) \geq \underbrace{\alpha \|x\|^2 - \|b\| \, \|x\|}_{\Downarrow} \qquad \text{Inégalité de Cauchy-Schwartz}$$

fonction quadratique coercive car $\alpha > 0$