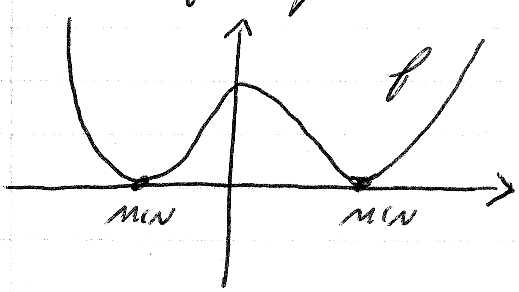
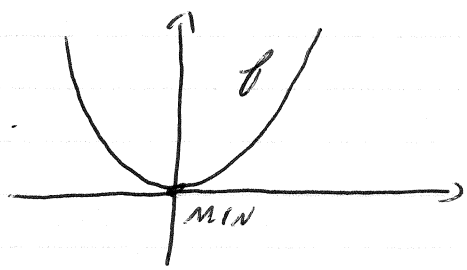
1.5 Convexité

Dans la section précédente, nous avons traité le problème de l'existence d'un point minimisant (par conséquent aussi du cas des points maximisants) pour une fonction numérique donnée.

Mais que peut-on dire de l'unicité ?



f admet 2 minimums
f n'est pas convexe



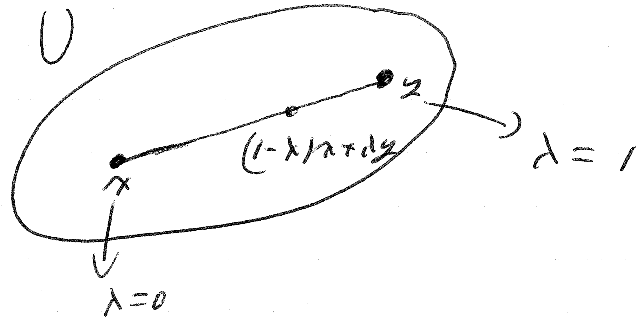
f admet un seul minimum

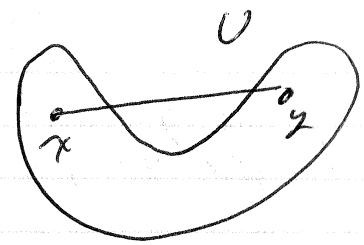
f est convexe

Définition : ensemble convexe

$U \subset \mathbb{R}^n$ est dit convexe si

$\forall x, y \in U$ et $\forall \lambda \in [0,1]$ $\qquad (1-\lambda)x + \lambda y \in U$



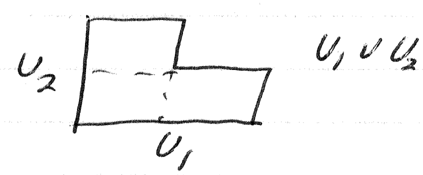


U n'est pas convexe.

Exercice : montrer que si $\{U_i\}_{i\in I}$ est une collection d'ensembles convexes,

$$\bigcap_{i\in I} U_i \text{ est convexe ou vide}$$

Remarque : la réunion d'ensembles convexes n'est pas en général convexe.



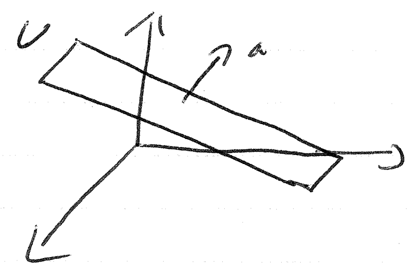
Exemples :

1. Hyperplan dans $\mathbb{R}^n$

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, a) = \alpha\}$$

où $a \in \mathbb{R}^n$ $(a \neq 0)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

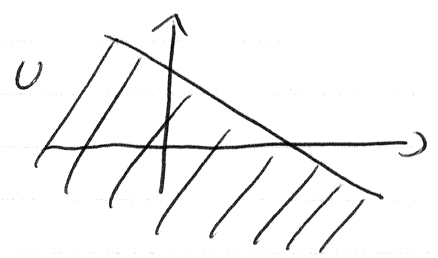
Ex. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \Leftrightarrow (1, 2, -1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4$



2. Demi-espace dans $\mathbb{R}^n$

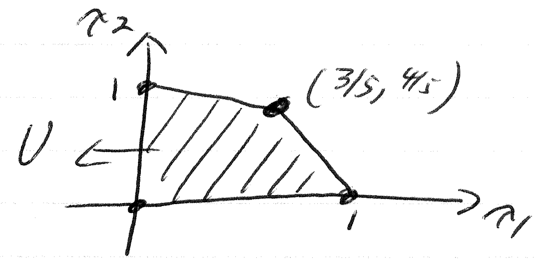
$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, a) \le \alpha\}$$

où $a \in \mathbb{R}^n$ $(a \neq 0)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.



3. Intersection de demi-espaces

Ex. $U = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array} \right\}$



4. Plus généralement, on a que

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\} \text{ est convexe}$$

où A est une matrice $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$

La notation $Ax \le b$ signifie les m inégalités

$$(Ax)_i \le b_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

5. Cas égalité :

$$U = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \}$$

si le système $Ax = b$ admet une solution.

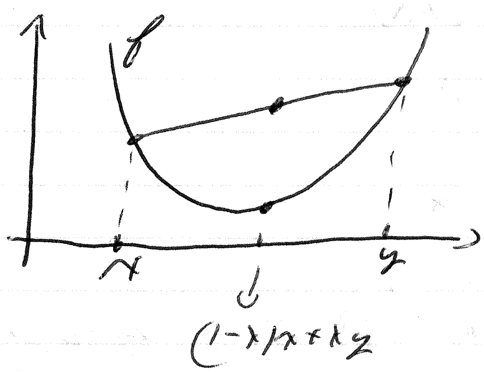
Fonctions convexes

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur un ensemble convexe U.

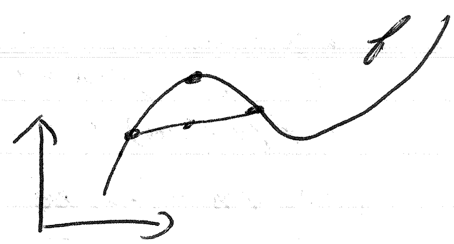
Définition : fonction convexe

f est dite convexe si

$$\forall x, y \in U \quad \forall \lambda \in [0,1] \qquad f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$



" La corde reliant les pts $f(x)$ et $f(y)$ est toujours au-dessus de l'arc reliant ces mêmes points "



f n'est pas convexe

Définition : fonction concave

f est concave si $-f$ est convexe.

Propriétés :

1. Si $f, g : U \to \mathbb{R}$ sont convexes

$$\Rightarrow f + g \text{ est convexe.}$$

2. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est convexe et $\alpha > 0$

$$\Rightarrow \alpha f \text{ est aussi convexe}$$

3. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est convexe, alors l'image convexe

$$f^{-1}(-\infty, \alpha] = \{ x \in U \mid f(x) \le \alpha \}$$

est un ensemble convexe (ou vide)

4. ~~Plus généralement, si $K \subset \mathbb{R}$ convexe et f convexe~~

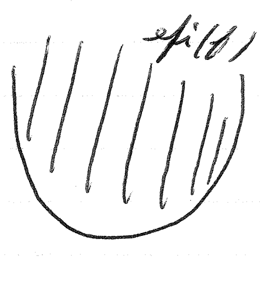
~~$\Rightarrow f^{-1}(K) = \{ x \in U \mid f(x) \in K \}$ est convexe~~

~~Ex. $f^{-1}[a, b]$~~

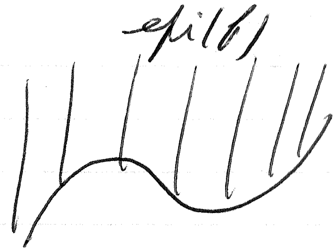
5. Épigraphe d'une fonction

$$\text{epi}(f) = \{ (x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \le \alpha \}$$

$$f \text{ est convexe} \iff \text{epi}(f) \text{ est convexe}$$



f est convexe



f n'est pas convexe

6. Si $\{f_i\}_{i \in I}$ est une collection de fonctions convexes, on a que la fonction $\sup\limits_{i \in I} f_i$ est convexe.

$$\left(\sup_{i \in I} f_i\right)(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$$

Exercice: démontrer les propriétés ci-dessus.

<u>Exemples:</u>

1. Fonctions linéaires

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (a, x) + \alpha \qquad a \neq 0 \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = \|x\|$

f est convexe à cause de l'inégalité du triangle
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

3. Si $g : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe et croissante
$$\alpha \leq \beta \Rightarrow g(\alpha) \leq g(\beta)$$
et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe avec $f(U) \subset I$ $\Longrightarrow$ $g \circ f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe

Ex: $g : \mathbb{R}^+ = [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est convexe
$\qquad y \mapsto y^3$ et croissante

$f(x) = \|x\|$

$\Rightarrow g \circ f(x) = \|x\|^3$ est convexe.

4. Norme vectorielle

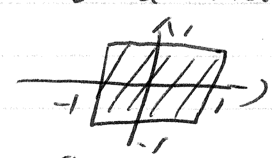
$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

vérifiant

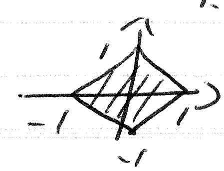
1) $p(x) \geq 0$
2) $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3) $p(\alpha x) = |\alpha| \, p(x) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
4) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Exemples: Boule unité

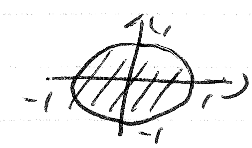
i) $\|x\|_\infty = \max_i \{ |x_i| \}$



ii) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

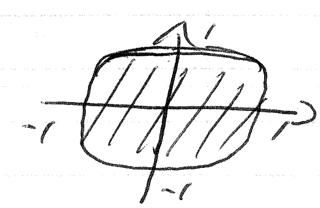


iii) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$



iv) $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}$

$p \geq 1$



v) $\|x\|_g = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire quelconque dans $\mathbb{R}^n$

5\. L'exemple le plus important pour 4 v)

$$\|x\|_A = \sqrt{(Ax,x)} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

où A est une matrice symétrique définie-positive.

$\langle x, y \rangle = (Ax, y)$ définit un produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Par conséquent, la fonction

$f(x) = (Ax, x)$ est convexe dans $\mathbb{R}^n$

Plus généralement,

$f(x) = \frac{1}{2}(Ax,x) - (b,x) + \text{Cte}$ où $b \in \mathbb{R}^n$, $\text{Cte} \in \mathbb{R}$

est convexe

Exemple: dans $\mathbb{R}^2$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2}{2} - 3x_1 + 4x_2 + 5$$

Concept de stricte convexité

C'est une notion importante qui va conduire au théorème d'unicité pour le problème de minimisation convexe.

Soit $f: U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe définie sur l'ensemble convexe U.

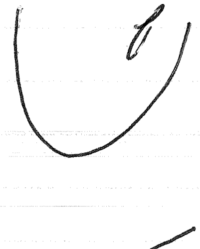
Définition: fonction strictement convexe

f est dite strictement convexe si

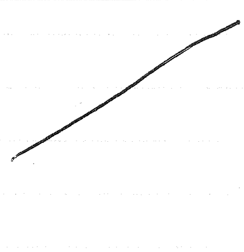
$\forall \lambda \in]0,1[\quad \forall x,y \in U \quad x \neq y$

$$f\big((1-\lambda)x+\lambda y\big) < (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$

Intuitivement, le graphe de f doit avoir une certaine "rondeur".



f est strict. convexe



la droite n'est pas strict. convexe (mais convexe)

Exemples ou contre-exemples

1. Les fonctions linéaires ne sont pas strict. convexes

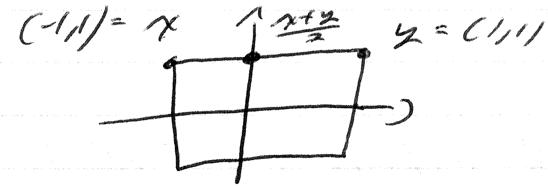
$$f(x) = (a, x) + \alpha \qquad a \neq 0 \in \mathbb{R}^n, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = \|x\|^2$ est strict. convexe

$$\triangleq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|_2^2$$

3. $f(x) = \|x\|_\infty^2$ n'est pas strict. convexe

car



$$\Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_\infty^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} = 1$$

4. Si A est une matrice sym. définie-positive

$f(x) = (Ax, x)$ est strictement convexe

Plus généralement

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) + cte \qquad b \in \mathbb{R}^n, \ cte \in \mathbb{R}$$

est strict. convexe

Nous terminons la section sur la convexité par le théorème suivant.

Théorème d'unicité

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction numérique strictement convexe définie sur un ensemble convexe U

Si f admet un point minimisant
i.e. $\exists a \in U$ t.q. $f(a) = \inf_{x \in U} f(x)$

alors ce point est unique.

Preuve: soient a_1 et a_2 2 pts minimisants.
Supposons que $a_1 \neq a_2$

$$f(a_1) = f(a_2) = \inf_{x \in U} f(x)$$

Posons $a = \frac{a_1 + a_2}{2} \in U$ car U est convexe.

$$\Rightarrow \quad f(a) < \frac{f(a_1) + f(a_2)}{2}$$

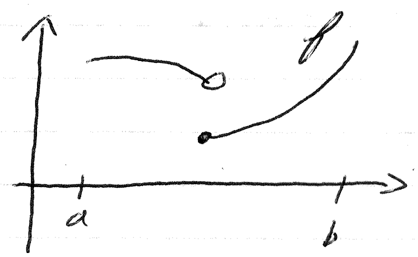
car f est strict. convexe

$$\inf_{x \in U} f(x) \leq f(a) < \inf_{x \in U} f(x)$$

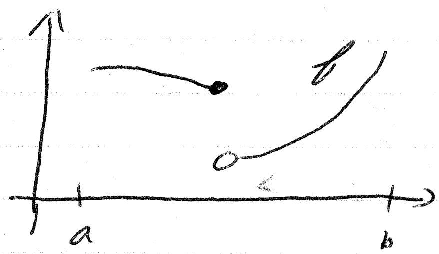
ce qui est une contradiction.

1.6 Extension des théorèmes d'existence aux fonctions semi-continues inférieurement.

Il est possible de généraliser le théorème d'existence de Weierstrass à une certaine classe de fonctions discontinues.



f admet un minimum



f n'admet pas de minimum

Pour ce type de fonctions, il est pratique d'admettre la valeur $+\infty$ comme valeur possible de la fonction.

Notation: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Définition: Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

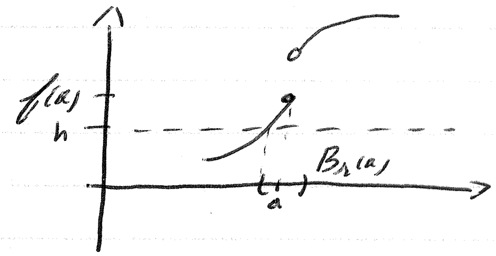
domaine de f

$$\operatorname{dom} f = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \infty \}$$

On dit que f est propre si $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$

Définition: semi-continuité inférieure

$f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ est semi-continue inférieurement ~~au~~ point $a \in \mathbb{R}^n$ si
$\forall h < f(a) \quad \exists B_r(a) \quad$ t.q. $\quad h < f(x) \quad \forall x \in B_r(a)$

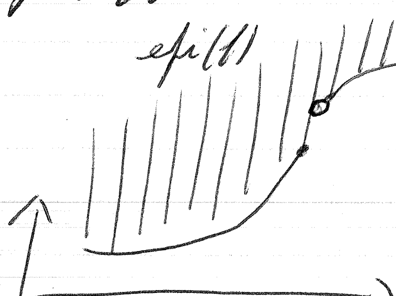


f est dit semi-continue inférieure (s.c.i.) si elle est en tout point $a \in \mathbb{R}^n$.

Dans la pratique, pour montrer qu'une fonction f est semi-continue inférieurement, il suffit de vérifier une des ~~deux~~ trois conditions équivalentes

1) $\forall k \in \mathbb{R} \qquad f^{-1}(-\infty, k] \subset \mathbb{R}^n$ fermé

2) $\text{epi}(f) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est fermé



3) $\forall x_n \to a$

$f(a) \leq \underline{\lim}\, f(x_n) =$ la plus petite limite parmi toutes les sous-suites convergentes de $f(x_n)$

Voici l'exemple qui motive les fonctions a.c.i.

Considérons l'intervalle $[-1,1]$. On définit la fonction indicatrice I par

$$I(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-1,1] \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction I est a.c.i.

Si on désire minimiser une fonction g sur $[-1,1]$, on a la relation

$$\min_{x \in [-1,1]} g(x) = \min_{x \in \mathbb{R}} g(x) + I(x)$$

$$= \min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

où $f = g + I$ qui est une fonction a.c.i. si g est continue par exemple.

Propriétés :

- f, g a.c.i $\Rightarrow$ $f+g$ a.c.i.
- f a.c.i et $\alpha \geq 0$ $\Rightarrow$ αf est a.c.i.

Généralisation du théorème de Weierstrass : cas borné

Théorème de Weierstrass (f s.c.i)

Soit $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction numérique propre définie sur un domaine U fermé et borné.

Si f est semi-continue inférieurement, alors il existe $a \in U$ t.q.

$$f(a) = \inf_{x \in U} f(x)$$

Le cas non borné aussi se généralise aux fonctions s.c.i.

Théorème de Weierstrass (f s.c.i et U non borné)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement, à section inférieure bornée et définie sur un domaine U fermé. Alors

$$\exists a \in U \quad \text{t.q.} \quad f(a) = \inf_{x \in U} f(x).$$