Chapitre 4. Optimisation différentiable avec contraintes

Étant donné une fonction numérique $f: U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 (ou C^2) définie sur une partie $U \subset \mathbb{R}^n$, nous sommes intéressés au problème de minimisation

$$f(u) = \inf_{x \in U} f(x) = \min_{x \in U} f(x)$$

Au chapitre précédent, nous avons considéré le cas où $U \subset \mathbb{R}^n$ était un ouvert, donc sans contraintes. Maintenant, nous allons prendre $U \subset \mathbb{R}^n$ un fermé.

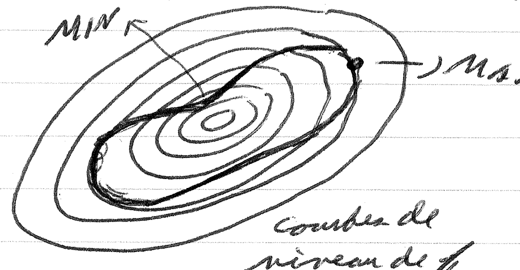
Voici des exemples de choix de U

1. Contraintes de type égalité

$$U = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_m(x) = 0 \}$$

Ex: a) $m=1$

$$\min_{g(x_1, x_2) = 0} f(x_1, x_2)$$



b)

$$\min_{Bx = c} \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$$

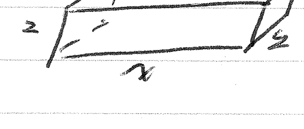
$A > 0$ sym, d'ordre n

où B = matrice d'ordre $m \times n$

b = vecteur dim $= n$

c = vecteur dim $= m$

c)



$$\max_{S(x,y,z) = cte} V(x,y,z)$$

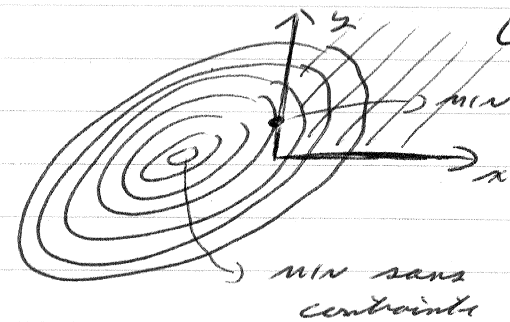
$\Leftrightarrow$

$$\min_{S(x,y,z) = cte} -V(x,y,z)$$

2. Contraintes de type inégalité

$$U = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \le 0 ;\ g_2(x) \le 0 ;\ \dots ;\ g_m(x) \le 0 \}$$

Ex: a) $\min\limits_{\substack{x \ge 0 \\ y \ge 0}} f(x,y)$



b) $\min\limits_{Bx \le c} \frac{1}{2}(Ax,x) - (b,x)$

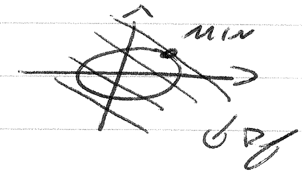
<u>Remarque</u> : en premier, nous allons traiter le cas où U est un convexe fermé.

Ex: $U = \{ Bx = c \}$

$U = \{ Bx \le c \}$

mais $U = \{ x^2 + y^2 = 1 \}$ n'est pas convexe

Ex $\min\limits_{x^2+y^2=1} -x-y$



Position du problème

Il s'agit de caractériser le problème de minimisation

$$\min_{x \in U} f(x)$$

sous les hypothèses que

1) f est dérivable (C^1 ou C^2),

2) $U \subset \mathbb{R}^n$ fermé convexe.

Rappel: • on a existence de la solution si
- U borné

ou
- f coercive (à section inf. bornée)

• on a unicité si f est strict. convexe.

4.1 Conditions d'optimalité

Voici une condition nécessaire d'optimalité que doit vérifier le point $a \in U$ minimisant de f.

Théorème : condition nécessaire du 1er ordre

Soit $f: U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 définie sur un ensemble convexe fermé $U \subset \mathbb{R}^n$.
Si $a \in U$ est un point minimisant, alors

$$(\nabla f(a), x-a) \geq 0 \quad \forall x \in U$$

Preuve : U est convexe

$\forall x \in U \Rightarrow a + t(x-a) \in U \quad \forall t \in]0,1[$

$\forall x \in U \Rightarrow f(a + t(x-a)) - f(a) \geq 0$ car a est min.

$\forall x \in U \Rightarrow \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \dfrac{f(a+t(x-a)) - f(a)}{t} \geq 0$

$\forall x \in U \quad (\nabla f(a), x-a) \geq 0.$

Remarques :

1) $U = \mathbb{R}^n \qquad (\nabla f(a), x-a) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Prenons $x = \pm y + a \qquad y \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow (\nabla f(a), \pm y) \geq 0$

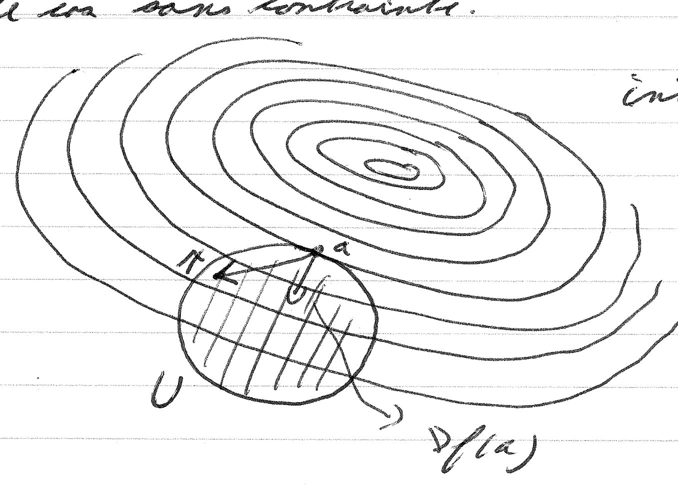
$\Rightarrow \begin{cases} (\nabla f(a), y) \geq 0 \\ (\nabla f(a), -y) \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (\nabla f(a), y) = 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \nabla f(a) = 0$

On retrouve la condition d'optimalité du 1er ordre dans le cas sans contrainte.

2) interprétation géométrique



courbe de niveau de f

Il faut que l'angle θ entre $\nabla f(a)$ et $x-a$ soit dans l'intervalle

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in U$$

C'est une condition très forte qui permet de trouver le (ou les pts) $a \in U$ minimisant.

Dans la situation où f est convexe, la condition nécessaire devient aussi suffisante.

Théorème: condition nécessaire et suffisante du 1er ordre dans le cas convexe.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et convexe définie sur un convexe fermé $U \subset \mathbb{R}^n$.

$a \in U$ est un pt. minimisant ssi $(\nabla f(a), x-a) \geq 0$ $\forall x \in U$.

Preuve: $\Rightarrow$ déjà fait

$\Leftarrow$

f est convexe

$\Rightarrow f(x) \geq f(a) + (\nabla f(a), x-a) \qquad \forall x \in U$

Mais $(\nabla f(a), x-a) \geq 0$

$\Rightarrow f(x) \geq f(a) + (\nabla f(a), x-a) \geq f(a) \quad \forall x \in U$

$\Rightarrow a$ est un min.

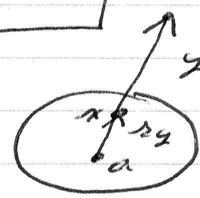
Remarque:

si $a \in \text{int}\, U$ (est situé à l'intérieur de U)

$$\Rightarrow \boxed{\nabla f(a) = 0}$$

En effet

fixons $y \in \mathbb{R}^n$



$\Rightarrow \exists\, r > 0$ t.q.

$x = a + ry \in U$

$$\Rightarrow (\nabla f(a), x - a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow r(\nabla f(a), y) \geq 0$$

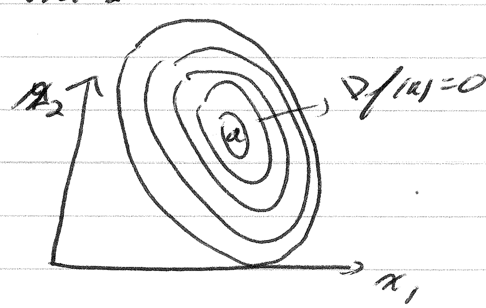
$$\Leftrightarrow (\nabla f(a), y) \geq 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow (\nabla f(a), -y) \geq 0$$

$$\Rightarrow (\nabla f(a), y) = 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \nabla f(a) = 0$$

En conclusion, si le pt. minimisant se trouve à l'intérieur de U, cela signifie que les contraintes sont inactives : On revient à la condition d'optimalité sans contraintes



$U = \{ x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \}$

Voici des exemples

Ex 1. U = sous-espace linéaire de $\mathbb{R}^n$

Ex: $\min\limits_{2x_1+3x_2=0} f(x_1, x_2)$

Dans ce cas, le pt. a minimisant est caractérisé par

$$(\nabla f(a), y) = 0 \qquad \forall y \in U$$

$$\Leftrightarrow \quad \nabla f(a) \in U^\perp$$

En effet : $\quad (\nabla f(a), x-a) \geq 0 \quad \forall x \in U$

Fixons $y \in U$

Posons $x = y + a \in U$ car U est linéaire

$$\Rightarrow \quad (\nabla f(a), x-a) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad (\nabla f(a), y) \geq 0 \qquad \forall y \in U$$

$$\Rightarrow \quad (\nabla f(a), -y) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad (\nabla f(a), y) = 0 \qquad \forall y \in U$$

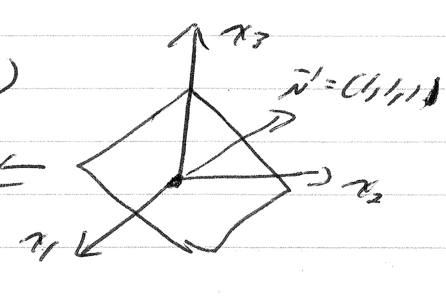
$$\Rightarrow \quad \nabla f(a) \in U^\perp$$

Exemple concret.

$$\min_{x_1+x_2+x_3=0} \frac{1}{2}\left[(x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-3)^2\right]$$

$$\nabla f = (x_1-1, x_2-2, x_3-3)$$

$U = \{x_1+x_2+x_3=0\}$ = plan $\subset$



$U^\perp$ = la droite engendrée par la normale $(1,1,1)$
erreur

So $\nabla f(a) \parallel (1,1,1)$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} a_1 - 1 &= t \\ a_2 - 2 &= t \\ a_3 - 3 &= t \end{aligned} \qquad t \neq 0$$

Mais $a \in U$

$$\Rightarrow (1+t) + (t+2) + (t+3) = 0$$

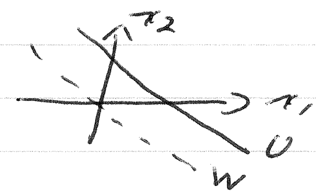
$$\Rightarrow 3t + 6 = 0 \quad \Rightarrow t = -2$$

$$\therefore \quad \begin{aligned} a_1 &= -1 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= 1 \end{aligned} \quad \text{est l'unique pt. min.}$$

Ex 2: Cas où $U \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace affine

$$U = x_0 + W \quad \text{avec } \underset{\text{sous-espace}}{W \subset \mathbb{R}^n}$$

Ex: $U = \{x_1 + x_2 - 1 = 0\}$



$U = \{y_1 + y_2 = 0\} + (1,0)$

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + 1 \\ x_2 &= y_2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= y_1 + 1 \\ x_2 &= -y_1 \end{aligned} \qquad \text{car } y_2 = -y_1$$

$\hookrightarrow$ équation paramétrique de la droite U

Analysons la condition d'optimalité

$$(\nabla f(a), x - a) \geq 0 \qquad \forall x \in U$$

Fixons $w \in W$ et prenons $x = a + w$

On a que $x \in U$ car U est sous-espace affine
(voir cas où U = droite)

$$\Rightarrow (\nabla f(a), x-a) \geq 0$$

$$\Rightarrow (\nabla f(a), w) \geq 0 \quad \forall w \in W$$

$$\Rightarrow (\nabla f(a), -w) \geq 0 \quad \text{car } W \text{ est linéaire}$$

$$\Rightarrow (\nabla f(a), w) = 0 \quad \forall w \in W$$

$$\Rightarrow \nabla f(a) \in W^{\perp}$$

On peut aussi écrire la condition d'optimalité sous la forme

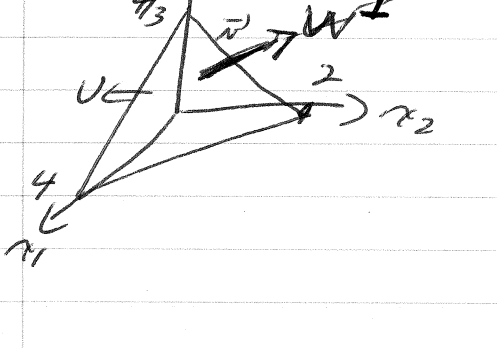
$$(\nabla f(a), x-a) = 0 \quad \forall x \in U$$

Exemple concret:

$$\min_{x_1+2x_2+3x_3=4} \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)$$

$U = \{x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\}$ = plan $\subset \mathbb{R}^3$ sous-espace affine

$$\nabla f = (x_1, x_2, x_3)$$



la normale $= (1, 2, 3)$

$\Rightarrow W^{\perp}$ = droite engendrée par $(1,2,3)$

La condition d'optimalité doit être

$$\nabla f(a) \; // \; (1,2,3)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1 = t, \quad a_2 = 2t, \quad a_3 = 3t$$

Mais $a \in U$

$$\Rightarrow \quad t + 2(2t) + 3(3t) = 4 \quad \Rightarrow t = 2/7$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = 2/7, \quad a_2 = 4/7, \quad a_3 = 6/7$$

est l'unique pt minimisant

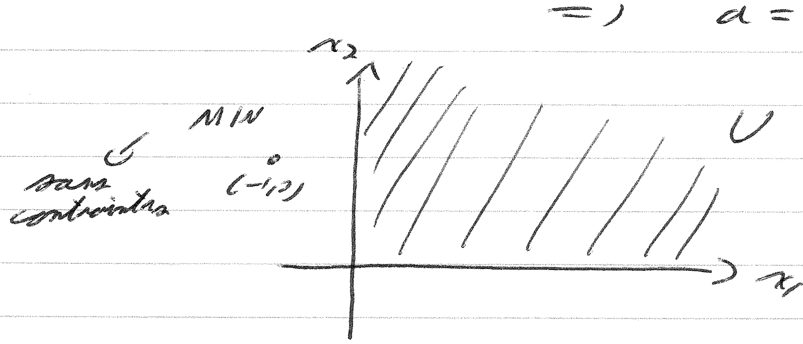
Ex. 3 : $U = \{ x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \}$

$$\min_{\substack{x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0}} \frac{1}{2}\left[2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \right] - x_2$$

$$\nabla f = (2x_1 + x_2, \; x_1 + x_2 - 1)$$

Remarque: le minimum doit se trouver sur la frontière car $\nabla f(a) = 0$

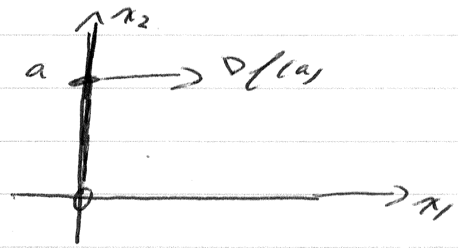
$$\Rightarrow \quad a = (-1, 2) \notin U$$



$$(\nabla f(a), x-a) \geq 0 \quad \forall x \in U$$

Etudions $\nabla f(a)$ sur la frontière.

i) $x_1 = 0$ et $x_2 > 0$

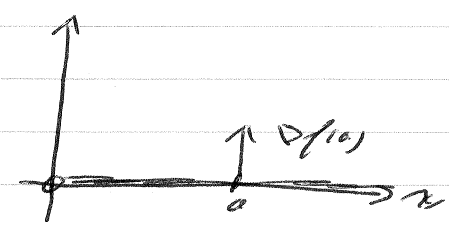


On doit avoir que $\nabla f(a)$ = même direction que $(1,0)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t > 0$$

$\Rightarrow \quad x_2 = 1 \quad \Rightarrow$ $(0,1)$ est un candidat potentiel

ii) $x_2 = 0$ et $x_1 > 0$

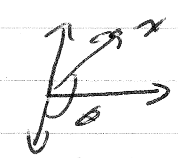


On doit avoir que $\nabla f(a)$ = même direction que $(0,1)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 - 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t > 0$$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad$ Non! car $x_1 > 0$

iii) en $(0,0)$



$\theta > \frac{\pi}{2}$

$\nabla f(0,0) = (0,-1)$ qui n'est pas admissible

D'où $(0,1)$ est l'unique minimum