4.2 Orthogonalité et cônes duaux

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de $\dim E = r$

Définition : sous-espace orthogonal

$$E^\perp = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in E \}$$

On a les propriétés suivantes.

1) $E^\perp \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$

2) $\dim E^\perp = n - \dim E = n - r$

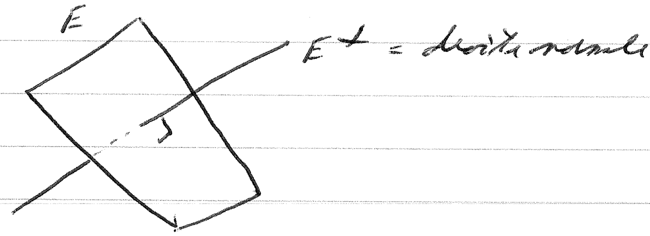
3) $\mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp$

c'est-à-dire que tout vecteur z de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique

$$z = x + y \quad \text{où } x \in E \text{ et } y \in E^\perp$$

4) $E^{\perp\perp} = E$

Exemple : $E = \{ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$ = plan dans $\mathbb{R}^3$



5) $E \subset F \subset \mathbb{R}^n$ 2 sous-espaces

$$\Rightarrow F^\perp \subset E^\perp.$$

Soit B une matrice de format $m \times n$

$$B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto Bx = \text{produit matrice - vecteur.}$$

On définit deux sous-espaces.

- le noyau de B :

$$\operatorname{Ker} B = \{ x \in \mathbb{R}^n \,/\, Bx = 0 \} \subset \mathbb{R}^n$$

- l'image de B

$$\operatorname{Im} B = \{ y \in \mathbb{R}^m \,/\, \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } y = Bx \}$$

On a que :

1) $\operatorname{Ker} B \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace

de $\dim \operatorname{Ker} B = n - \operatorname{rg}(B)$

2) $\operatorname{Im} B \subset \mathbb{R}^m$ est un sous-espace de

$\dim \operatorname{Im} B = \operatorname{rg}(B)$

Rappel : $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(B^t)$

3) $(\operatorname{Ker} B)^\perp = \operatorname{Im} B^t$

4) $(\operatorname{Im} B)^\perp = \operatorname{Ker} B^t$

Montrons les deux ~~dernières~~ propriétés.

Preuve de 3). On a que $\operatorname{Im} B^t \subset (\ker B)^\perp$

car $z \in \operatorname{Im} B^t \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^m$ t.q. $z = B^t y$

$$(z, x) = (B^t y, x) \quad \text{pour } \forall x \in \ker B$$
$$= (y, Bx)$$
$$= 0$$
$$\Rightarrow z \in (\ker B)^\perp$$

De plus, $\dim (\ker B)^\perp = n - \dim \ker B$
$$= n - (n - \operatorname{rg}(B))$$
$$= \operatorname{rg}(B)$$

et $\dim \operatorname{Im} B^t = \operatorname{rg}(B^t) = \operatorname{rg}(B)$

$$\Rightarrow \dim (\ker B)^\perp = \dim \operatorname{Im} B^t$$
et $\operatorname{Im} B^t \subset (\ker B)^\perp$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} B^t = (\ker B)^\perp$$

Preuve de 4).

$$(\ker B^t)^\perp = \operatorname{Im} B^{tt} = \operatorname{Im} B$$

$$\Rightarrow (\ker B^t)^{\perp\perp} = (\operatorname{Im} B)^\perp$$

$$\text{i.e. } \ker B^t = (\operatorname{Im} B)^\perp$$

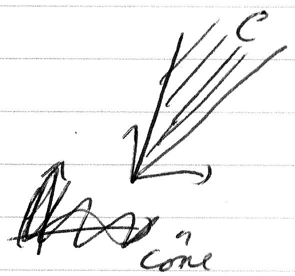
Définition d'un cône de sommet 0

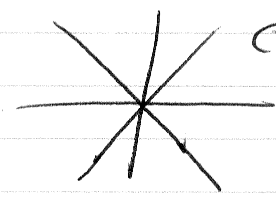
$C \subset \mathbb{R}^n$ est un cône de sommet 0

si

$$\forall \lambda > 0 \quad \forall x \in C \Rightarrow \lambda x \in C$$

Ex:





Un cône convexe C est caractérisé par les deux relations

$$x, y \in C \Rightarrow x + y \in C$$

$$\lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in C$$

Exemple: un sous-espace $E \subset \mathbb{R}^n$ est un cône convexe dans $\mathbb{R}^n$.

Définition: cône dual

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ une partie de $\mathbb{R}^n$

$$U^* = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \geq 0 \quad \forall y \in U \}$$

On a que U^* est un cône convexe fermé de sommet 0.

En effet, si

$$x_1, x_2 \in U^* \Leftarrow \begin{array}{l} (x_1, y) \geq 0 \quad \forall y \in U \\ (x_2, y) \geq 0 \quad \forall y \in U \end{array}$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2, y) \geq 0 \quad \forall y \in U$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 \in U^*$$

De plus, $\lambda > 0$ et $x \in U^*$

$$\Rightarrow \quad (x, y) \geq 0 \quad \forall y \in U$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda x, y) \geq 0 \quad \forall y \in U$$

$$\Rightarrow \quad \lambda x \in U^*$$

U^* est fermé car l'intersection d'ensembles fermés

$$U^* = \bigcap_{y \in U} \{x \mid (x, y) \geq 0\}$$

Calcul de U^*: on supposera que U est fermé.

Exemple 1 : $U = E \subset \mathbb{R}^n$ sous-espace de $\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \quad U^* = E^\perp = U^\perp$$

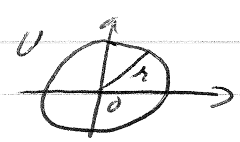
En effet: $x \in U^* \iff (x, y) \geq 0 \quad \forall y \in U$

$$\iff (x, -y) \geq 0$$

$$\iff (x, y) = 0 \quad \forall y \in U$$

$$\iff x \in U^\perp$$

Exemple 2: $U = \overline{B_r(0)}$



$$\Rightarrow \quad U^* = \{0\}$$

En effet: $x \in U^* \Rightarrow (x, y) \geq 0 \quad \forall y \in \overline{B_r(0)}$

$$\Rightarrow (x, -y) \geq 0$$

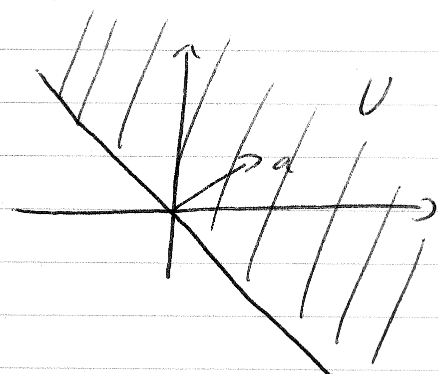
$$\Rightarrow (x, y) = 0 \quad \forall y \in \overline{B_r(0)}$$

On prend $y = r \frac{x}{\|x\|}$ $\Rightarrow x = 0$

Exemple 3: $U = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \geq 0 \}$ $a \in \mathbb{R}^n$, $\neq 0$

$=$ demi-plan dans $\mathbb{R}^3$ $(n=3)$

$\Rightarrow U^* = \{ \lambda a \mid \lambda \geq 0 \}$



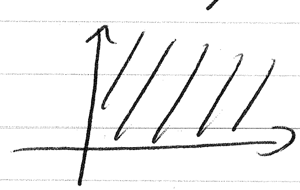
Géométriquement: $x \in U^*$ si $\langle x, y \rangle \geq 0 \quad \forall y \in U$

$\Leftrightarrow$ l'angle θ entre les vecteurs x et y est dans l'intervalle $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Suivant cette interprétation, on obtient que

$U^* = \{ \lambda a \mid \lambda \geq 0 \}$

Exemple 4: $U = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \}$



$\Rightarrow U^* = U$

Voici deux propriétés fondamentales des cônes duaux.

Théorème:

a) $\quad$ Si $U_1 \subset U_2 \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow U_2^* \subset U_1^*$

b) $\quad$ Si U est un cône convexe fermé

$$\Rightarrow \quad U^{**} = U$$

Preuve.

a) $\quad$ si $x \in U_2^* \Leftarrow (x, y) \geq 0 \quad \forall y \in U_2$

$\Downarrow$

$\forall y \in U_1$

car $U_1 \subset U_2$

$\Rightarrow x \in U_1^*$

b) $\quad$ ~~On doit démontrer~~

Montrons que $\quad U \subset U^{**}$

$x \in U$, il faut montrer que $x \in U^{**}$

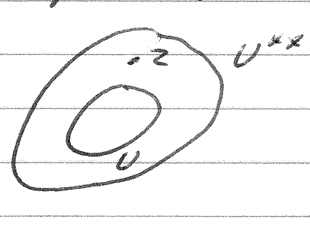
Or $\quad (x, y) \geq 0 \quad$ si $y \in U^*$

$\Rightarrow (x, y) \geq 0 \quad \forall y \in U^*$

$\Rightarrow x \in (U^*)^*$

Montrons que $\quad U^{**} \subset U$

Selon la 1e partie, on a la situation



Soit $z \in U^{**}$

On considère le problème de minimisation

$$\min_{x \in U} \frac{1}{2} \|x - z\|^2$$

$$\|x-z\|^2 = \|x\|^2 - 2\cdot(x, z) + \|z\|^2$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) + cte$$

avec $A = I$ et $b = z$ $\Rightarrow \nabla f = Ax - b = x - z$

$\Rightarrow$ le prob. de min. admet une solution unique $x_0 \in U$ qui est caractérisée par

$$(\nabla f(x_0), y - x_0) \geq 0 \quad \forall y \in U$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_0 - z, y - x_0) \geq 0 \quad \forall y \in U$$

Mais U est un cône convexe

$$\Rightarrow \quad \underset{\in U}{y} \rightarrow x_0 + y \in U$$

$$\Rightarrow \quad (x_0 - z, y) \geq 0 \quad \forall y \in U$$

$$\Rightarrow \quad x_0 - z \in U^*$$

Aussi, on peut prendre $y = 0 \Rightarrow (x_0 - z, -x_0) \geq 0$

et $y = 2x_0 \Rightarrow (x_0 - z, x_0) \geq 0$

$$\Rightarrow \quad (x_0 - z, x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \|x_0 - z\|^2 = (x_0 - z, x_0 - z)$$

$$= \underbrace{(x_0 - z, x_0)}_{=0} - (x_0 - z, z)$$

$$= -(x_0 - z, z) \leq 0 \quad \text{car } z \in U^{**} \text{ et } x_0 - z \in U^*$$

$$\Rightarrow \|x_0 - z\| = 0$$

$$\Rightarrow \quad z = x_0 \in U \quad \Rightarrow \quad U^{**} \subset U$$

Un cas très important de calcul du cône dual est le suivant.

$$U = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Bx \geq 0 \}$$

où B est une matrice $m \times n$.
Il est facile de montrer que U est un cône convexe fermé de sommet 0.

Nous allons montrer que

$$U^* = \left\{ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j b_j \;\middle|\; \forall \lambda_j \geq 0 \right\}$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times n} \qquad b_j \in \mathbb{R}^n$$

L'inégalité $Bx \geq 0$ peut aussi s'interpréter de la manière suivante

$$Bx \geq 0 \iff \begin{cases} (b_1, x) \geq 0 \\ (b_2, x) \geq 0 \\ \vdots \\ (b_m, x) \geq 0 \end{cases} \qquad \text{système de } m \text{ inégalités linéaires}$$

Ex :
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 0 \end{aligned} \qquad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Bx \geq 0$$

avec $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

Un point $x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j b_j$ peut aussi s'écrire sous la forme

$$x = B^t \lambda = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}_{n \times m} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

$$\therefore \left\{ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j b_j \;/\; \lambda_j \geq 0 \right\} = B^t K^+$$

$$\text{où } K^+ = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^m \;/\; \lambda_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, m \right\}$$

Avec ces notations, montrons que

$$U^* = B^t K^+$$

Preuve:

a) $B^t K^+ \subset U^*$

Soit $x \in B^t K^+$ $\Leftrightarrow$ $x = B^t \lambda$ avec $\lambda \geq 0$

Pour $y \in U = \{y \,/\, By \geq 0\}$

$$\Rightarrow (x, y) = (B^t \lambda, y) = (\lambda, By)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (By)_i \geq 0$$

car une somme de termes positifs. $\lambda_i \geq 0$ et $(By)_i \geq 0$ car $y \in U$

$$\therefore x \in U^*$$

b) Montrons que $U^* \subset B^t K^+$

En utilisant la dualité car U^* et $B^t K^+$ sont des cônes convexes fermés de sommet 0

$$\Rightarrow \quad U^{**} = U \quad \text{et} \quad (B^t K^+)^{**} = B^t K^+$$

Il suffit de montrer que:

$$(B^t K^+)^* \subset U$$

Soit $x \in (B^t K^+)^*$

$$\Leftrightarrow \quad (x, y) \geq 0 \qquad \forall y \in B^t K^+$$

$$\Leftrightarrow \quad (x, B^t \lambda) \geq 0 \qquad \forall \lambda \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (Bx, \lambda) \geq 0 \qquad \forall \lambda \geq 0$$

Prenons $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_m = 0$

$$\Rightarrow \quad (Bx)_1 \lambda_1 \geq 0 \qquad \forall \lambda_1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad (Bx)_1 \geq 0$$

On recommence pour l'indice 2 et ainsi de suite.

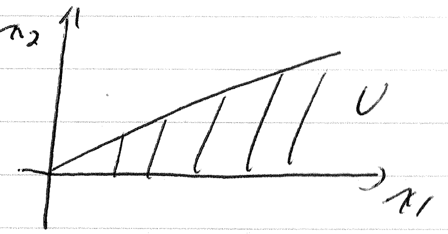
$$\Rightarrow \quad Bx \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in U$$

$$\therefore \quad (B^t K^+)^* \subset U$$

$\Rightarrow$ par dualité

$$U^* \subset (B^t K^+)^{**} = B^t K^+$$

Voici un exemple de calcul de U^*



$$U = \left\{ (x_1, x_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$U = \{ x \mid \underset{\geq 0}{Bx} \} = \left\{ (x_1, x_2) \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow U^* = \{ \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 \mid \lambda_i \geq 0 \}$$

où $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^{\text{ième}}$ ligne de B