4.6 Problèmes sous contraintes d'inégalité : cas général

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1.

On veut traiter le problème de minimisation

$$\min_{x \in U} f(x)$$

où $U = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ g(x) \leq 0\}$

Nous savons que l'optimum est caractérisé par la condition d'optimalité

$$(\nabla f(a), h) \geq 0 \qquad \forall h \in C_U(a)$$

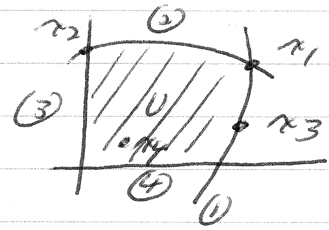
Par conséquent, l'objectif est de calculer le cône des directions admissibles $C_U(a)$.

Définition : ensemble des contraintes actives
Soit $x_0 \in U$

$$I(x_0) = \{ j = 1, \dots m \ / \ g_j(x_0) = 0 \}$$

Les autres indices sont dits inactifs.

Ex :



(1) $g_1(x) \leq 0$
(2) $g_2(x) \leq 0$
(3) $g_3(x) \leq 0$
(4) $g_4(x) \leq 0$

$I(x_1) = \{1, 2\}$

$I(x_2) = \{2, 3\}$

$I(x_3) = \{1\}$

$I(x_4) = \emptyset$

(137)

Calcul de $C_U(x_0)$:

On a que

$$C_U(x_0) \subset \left\{ h \in \mathbb{R}^n \,/\, (\nabla g_i, h) \leq 0 \quad \forall i \in I(x_0) \right\}$$

En effet, soit $h \in C_U(x_0)$ et $j \in I(x_0) \Rightarrow g_j(x_0) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\exists\, x(t) \in U,\ x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt}(0) = h$$

Pour $j \in I(x_0)$ $\Rightarrow$ $g_j(x(t)) \leq 0$ car $x(t) \in U$

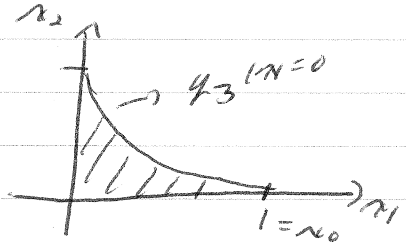
$$\Rightarrow \quad g_j(x(t)) - \underbrace{g_j(x(0))}_{=0} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{g_j(x(t)) - g_j(x(0))}{t} \leq 0 \qquad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{g_j(x(t)) - g_j(x(0))}{t} \leq 0$$

$$(\nabla g_j(x_0), h) \leq 0$$

Remarque : voici un exemple où on n'a pas l'égalité.



$g_1(x) = -x_1 \leq 0$

$g_2(x) = -x_2 \leq 0$

$g_3(x) = x_2 - (1-x_1)^3 \leq 0$

$I(x_0) = \{2, 3\}$ Or $C_U(x_0) = \{ (h_1, 0) \mid h_1 \leq 0 \}$

$\nabla g_2(1,0) = (0,-1)$

$\nabla g_3(1,0) = (0,1)$

$\Rightarrow \left\{ (\nabla g_j, h) \leq 0 \ \ \forall j \in I(x_0) \right\} = \{ (h_1, 0) / h_1 \in \mathbb{R} \}$

Malgré cette remarque, on a souvent égalité. Par la suite, nous ferons cette hypothèse.

Déf. hypothèse de qualification

Le pt $x_0 \in U$ vérifie l'hypothèse de qualification si

$$C_U(x_0) = \left\{ h \in \mathbb{R}^n \,/\, (Dg_i(x_0), h) \le 0 \quad \forall i \in I(x_0) \right\}$$

Sous cette hypothèse, pour le pt $x_0 \in U$,

posons m_{x_0} = la cardinalité de $I(x_0)$ $\le m$

$$I(x_0) = \{ i_1, i_2, i_3, \dots, i_{m_{x_0}} \}$$

On forme la matrice notée par B de format $m_{x_0} \times n$

$$B = \begin{pmatrix} Dg_{i_1} \\ Dg_{i_2} \\ \vdots \\ Dg_{i_{m_{x_0}}} \end{pmatrix}_{m_{x_0} \times n}$$

On a que:

$$C_U(x_0) = \{ h \in \mathbb{R}^n \,/\, Bh \le 0 \}$$

$$= \{ h \in \mathbb{R}^n \,/\, (-B)\, h \geq 0 \}$$

$$\Rightarrow C_U(x_0)^* = \text{le cône dual de } C_U(x_0)$$

$$= -B^t K^+$$

$$= \{ -B^t \lambda \,/\, \lambda \geq 0 \} \qquad \lambda \in \mathbb{R}^{m_{x_0}} \subset \mathbb{R}^m$$

La condition d'optimalité du problème $\min_{x \in U} f(x)$

s'écrit :

si x_0 est le minimum $\Rightarrow$ $\boxed{Df(x_0) \in C_U(x_0)^*}$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^{m_{x_0}} \quad t.q. \quad Df(x_0) = -B^t \lambda \quad \lambda \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad Df(x_0) + \sum_{j \in I(x_0)} \lambda_j \, Dg_j(x_0) = 0$$

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda \geq 0$ t.q.

$$\begin{cases} Df(x_0) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, Dg_j(x_0) = 0 \\ g_j(x_0) \leq 0 \qquad \forall j \end{cases}$$

Il reste à montrer que

$$\lambda_j \, g_j(x_0) = 0 \qquad \forall j = 1, \dots, m.$$

Si $j \in I(x_0) \Rightarrow g_j(x_0) = 0$ donc vrai

Si $j \notin I(x_0) \Rightarrow g_j(x_0) < 0$. On prend $\lambda_j = 0$ donc vrai.

Finalement, on obtient le théorème de Kuhn-Tucker

Considérons le problème

$$\min_{x \in U} f(x)$$

où $U = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, m \}$

Si x_0 est un minimum local de f qui vérifie la condition de qualification i.e.

$$C_U(x_0) = \{ h \in \mathbb{R}^n \mid (\nabla g_j(x_0), h) \leq 0 \quad \forall j \in I(x_0) \}$$

alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\begin{cases} \nabla f(x_0) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x_0) = 0 & \\ g_j(x_0) \leq 0 & \forall j = 1, \dots m \\ \lambda_j \geq 0 & \forall j \quad " \\ \lambda_j \, g_j(x_0) = 0 & \forall j \quad " \end{cases}$$

Remarque :

Pour vérifier l'hypothèse de qualification, on peut utiliser le critère que la matrice B (qui dépend de x_0)

$$B = \begin{pmatrix} \nabla g_{j_1} \\ \vdots \\ \nabla g_{j_{m_{x_0}}} \end{pmatrix}$$

soit de rang maximal.

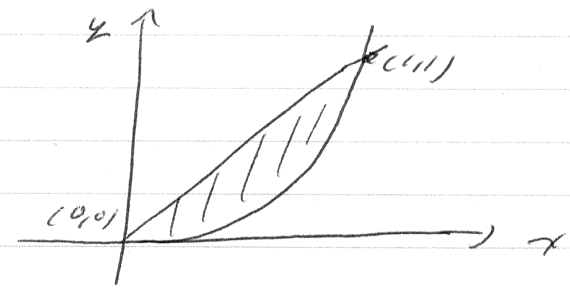
Dans l'exemple du début : $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(B) = 1 < 2$

$\Rightarrow$ ~~the~~ le critère n'est pas vérifié.

Exemple:

$$\min_{(x,y)\in U} \frac{1}{2}\left[(x-2)^2+(y-1)^2\right]$$

$$U=\{(x,y) \mid x^2\le y\le x\}$$



$$g_1(x,y)=x^2-y$$
$$g_2(x,y)=y-x$$

Conditions de Kuhn-Tucker

$$\begin{cases} x-2 + 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 \\ y-1 + -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \\ x^2-y \le 0 \\ y-x \le 0 \\ \lambda_1 (x^2-y)=0 \\ \lambda_2 (y-x)=0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Si } \lambda_2 = 0} \Rightarrow x = \dfrac{2}{1+2\lambda_1}$ et $y = 1+\lambda_1$

Mais $0\le y\le 1$ selon la figure $\Rightarrow 1+\lambda_1 \le 1 \Rightarrow \lambda_1 \le 0$
$\Rightarrow \lambda_1 \geq 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 2$
$\quad\quad\; y = 1 \quad$ impossible $\quad (2,1) \notin U$

$\boxed{\text{Donc } \lambda_2 \neq 0} \Rightarrow \quad y = x$

Si $\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 + \lambda_2 \geq 2$ car $\lambda_2 \geq$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; y = 1 - \lambda_2$

impossible

$\Downarrow$

$\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow x^2 = y = x$

$\Downarrow$

$x = 0$ ou $x = 1$

$\Rightarrow \quad (0,0)$ ou $(1,1)$

Pour $(0,0)$: $\quad$ 1 et 2e éq.

$-2 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -2 \leq 0$ impossible

Pour $(1,1)$: $\quad$ 1 et 2e éq.

$$\begin{matrix} -1 + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 0 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 1 > 0 \\ \lambda_2 = 1 > 0 \end{matrix}$$

$\therefore$ la solution est:

$x = 1$
$y = 1$
$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 1$

$I(1,1) = \{1, 2\}$

de plus $\begin{pmatrix} Dg_1(1,1) \\ Dg_2(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

qui est de rg = 2 maximal

$\Downarrow$

$(1,1)$ se qualifie.

$\therefore \quad (1,1)$ est l'unique minimum selon la théorie f est strict. convexe.