

**MAT-2430**

**Introduction aux fractals  
et aux systèmes dynamiques**

**Jean-Jacques Gervais**

2<sup>e</sup> version  
Août 2009



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Fractals</b>	<b>3</b>
1.1	Définition . . . . .	3
1.2	Principe de contraction . . . . .	17
1.3	Systèmes itératifs de fonctions . . . . .	23
1.4	L-systèmes . . . . .	31
<b>A</b>	<b>Transformations linéaires ou affines</b>	<b>35</b>
A.1	Généralités . . . . .	35
A.2	Similitudes du plan . . . . .	37
A.3	Contraction non uniforme et cisaillement . . . . .	42
A.4	Anatomie des similitudes du plan . . . . .	44
A.5	Méthode du “bulldozer” . . . . .	48
<b>2</b>	<b>Formes irrégulières : dimension fractale</b>	<b>51</b>
2.1	Les courbes . . . . .	51
2.2	Dimension fractale . . . . .	66

2.3	Remarques finales et dimension de Hausdorff . . . . .	75
<b>3</b>	<b>Systèmes dynamiques discrets en dimension 1</b>	<b>79</b>
3.1	Introduction . . . . .	79
3.2	Stabilité et principe de linéarisation . . . . .	85
3.3	Bifurcations . . . . .	90
3.4	Cascade de doublements de période . . . . .	103
3.5	Fonction logistique : la dynamique lorsque $r > r_\infty$ . . . . .	110
<b>4</b>	<b>Chaos</b>	<b>119</b>
4.1	Un résultat étonnant : le théorème de Sarkovskii . . . . .	119
4.2	Fonctions chaotiques . . . . .	121
4.3	Deux applications chaotiques . . . . .	125
<b>5</b>	<b>L'ensemble de Mandelbrot</b>	<b>133</b>
5.1	Itération de fonctions . . . . .	133
5.2	Définition de $\mathcal{M}$ . . . . .	134
5.3	Ensembles de Julia . . . . .	137
5.4	Point critique . . . . .	139
5.5	Étude de composantes de $\mathcal{M}$ . . . . .	141
5.6	Points de Misiurewicz . . . . .	145

# Chapitre 1

## Fractals

### 1.1 Définition

Comme point de départ, nous prendrons temporairement la définition suivante d'un fractal.

**Définition 1.1.1.** Un *fractal* est un objet qui a les trois propriétés suivantes :

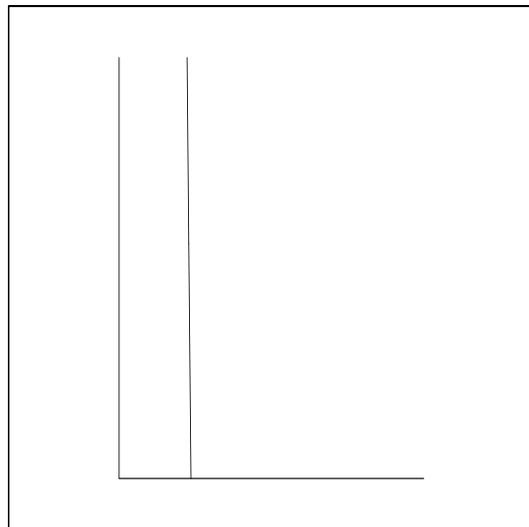
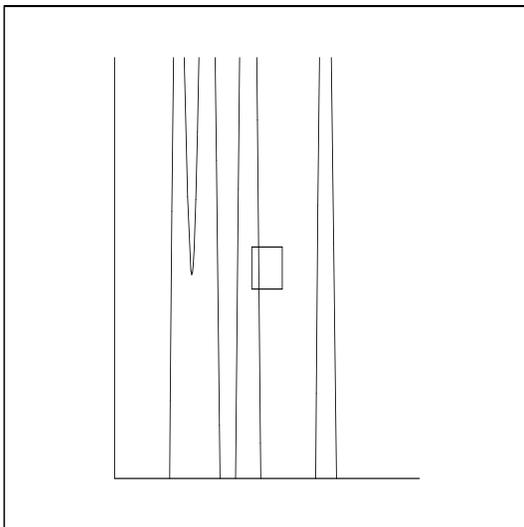
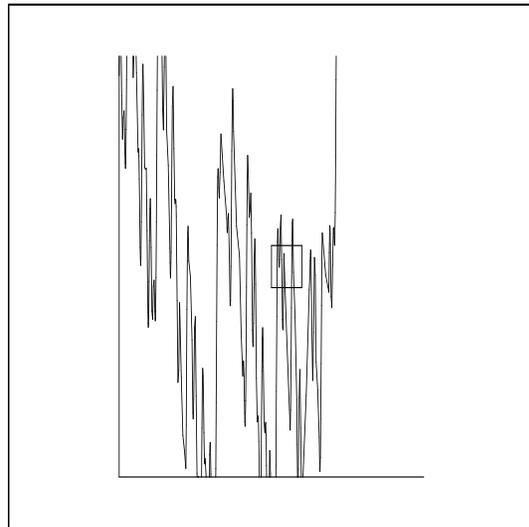
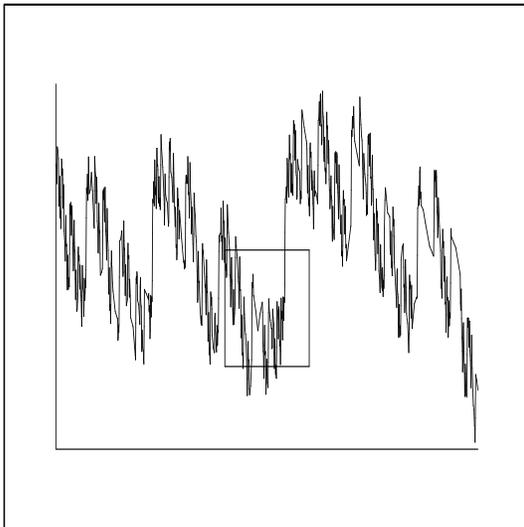
- irrégulier à toutes les échelles ;
- auto-similaire ;
- de dimension non-entière.

#### 1.1.1 Irrégularité à toutes les échelles

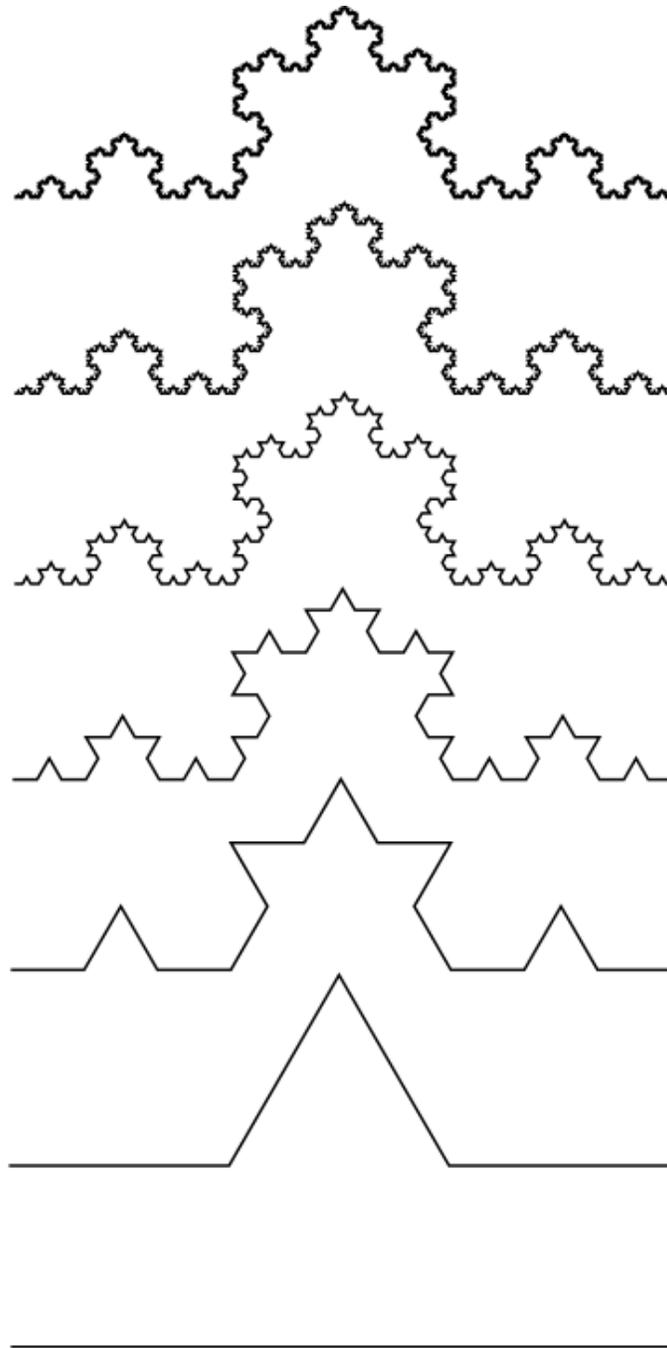
**Définition 1.1.2.** Un objet est *irrégulier à toutes les échelles* si, même en le regardant de plus en plus près (par exemple avec un zoom), il apparaît toujours irrégulier (non lisse).

**Exemples 1.1.3.****a) Courbes différentiables**

Les courbes différentiables n'ont pas cette propriété. Si on regarde de plus en plus près une courbe différentiable, au bout de quelques agrandissements, la portion de la courbe regardée a l'allure d'une droite (en fait, elle finit par se confondre avec sa tangente près du point regardé).



## b) Courbe de von Koch



De bas en haut, on a d'abord les cinq premières étapes de la construction, puis une représentation de la courbe que l'on obtiendrait en itérant à l'infini ce processus. La courbe de von Koch est continue, mais différentiable nulle part, c'est-à-dire en aucun point, elle a une tangente.

### 1.1.2 Auto-similitude

**Définition 1.1.4.** Un objet  $F$  est *auto-similaire* s'il se décompose en un nombre fini de parties  $F_1, F_2, \dots, F_N$  qui sont toutes similaires à l'objet entier  $F$ . Une partie  $F_i$  est *similaire* à  $F$  s'il existe un facteur de dilatation  $s$  tel que si l'on dilate  $F_i$  d'un facteur  $s$ , on retrouve  $F$  au complet.

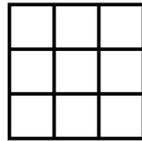
**Exemples 1.1.5** (Objets auto-similaires).

a) Segment



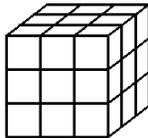
$$\begin{aligned} N &= 3 \\ s &= 3 \end{aligned}$$

b) Carré



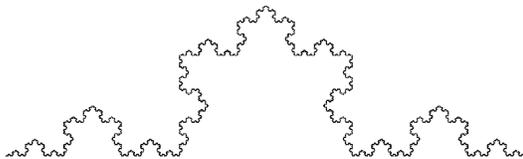
$$\begin{aligned} N &= 9 \\ s &= 3 \end{aligned}$$

c) Cube



$$\begin{aligned} N &= 27 \\ s &= 3 \end{aligned}$$

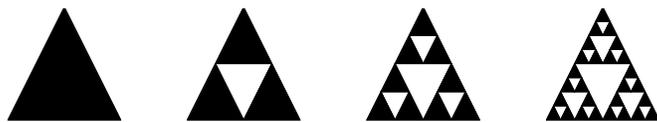
d) von Koch



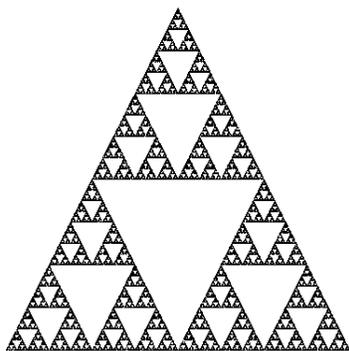
$$\begin{aligned} N &= 4 \\ s &= 3 \end{aligned}$$

## e) Triangle de Sierpinski

Une méthode de construction : les premières étapes



en itérant à l'infini ce processus :



$$\begin{aligned}
 N &= 3 \\
 s &= 2 \\
 &\text{ou} \\
 N &= 9 \\
 s &= 4 \\
 &\text{ou} \\
 N &= 27 \\
 s &= 8 \\
 &\vdots \\
 N &= 3^k \\
 s &= 2^k
 \end{aligned}$$

Maintenant, nous précisons et généralisons la définition d'auto-similitude.

**Définition 1.1.6.** Une *similitude* du plan est une application  $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $\|w(P) - w(Q)\| = k\|P - Q\|$  pour tout  $P \in \mathbb{R}^2$  et tout  $Q \in \mathbb{R}^2$  où  $k$  est une constante appelée le *rapport* de la similitude  $w$ .

**Définition 1.1.7.** Un ensemble  $F \subset \mathbb{R}^2$  est *auto-similaire* s'il existe des similitudes  $w_1, \dots, w_N$  telles que

$$F = w_1(F) \cup \dots \cup w_N(F).$$

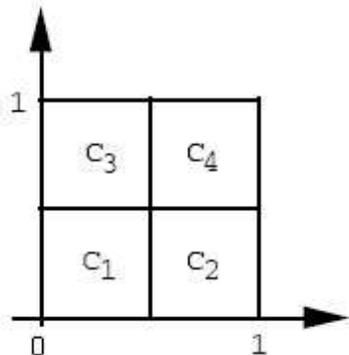
Dans la suite de ce cours, nous ne considérerons que des similitudes qui sont des applications affines étant donné que ces dernières sont très bien connues. La démonstration du résultat suivant se retrouve à l'annexe A.

**Théorème 1.1.8.** Une application affine  $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une similitude si et seulement si c'est une composition de rotation, dilatation (ou contraction), réflexion et translation, c'est-à-dire si et seulement si elle est de la forme

$$\begin{aligned}
 w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} k \cos \theta & -k \sin \theta \\ k \sin \theta & k \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} && \text{ou} \\
 w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} k \cos \theta & k \sin \theta \\ k \sin \theta & -k \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

**Exemples 1.1.9** (Ensembles auto-similaires).

a) Le carré  $C = [0, 1] \times [0, 1]$



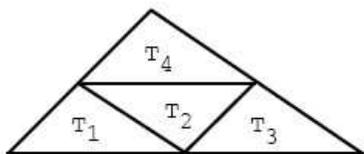
$$C = w_1(C) \cup w_2(C) \cup w_3(C) \cup w_4(C)$$

où

$$\begin{aligned} w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a  $C_i = w_i(C)$ ,  $i = 1, 2, 3$  et  $4$ .

b) Tout triangle  $T$  est auto-similaire.



En joignant les points milieux des côtés, nous obtenons quatre triangles  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$  tous semblables à  $T$ . Ainsi, il existe quatre similitudes  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  et  $w_4$  de rapport  $\frac{1}{2}$  telles que  $w_i(T) = T_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  et  $4$ , d'où

$$T = w_1(T) \cup w_2(T) \cup w_3(T) \cup w_4(T).$$

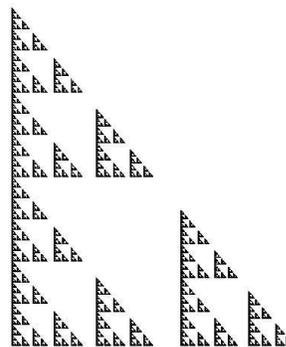
c) Par construction, le triangle de Sierpinski, le tapis de Sierpinski, la courbe de von Koch, etc. sont des ensembles auto-similaires.

d) L'ensemble  $F$  suivant :

$$F = w_1(F) \cup w_2(F) \cup w_3(F)$$

où

$$\begin{aligned} w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

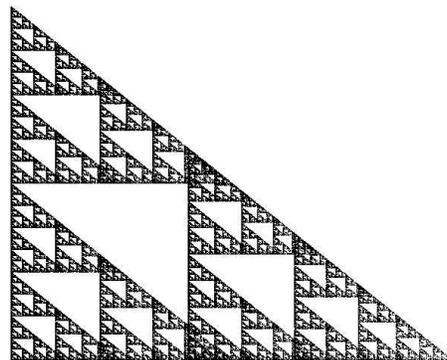


e) L'ensemble  $G$  suivant :

$$G = w_1(G) \cup w_2(G) \cup w_3(G)$$

où

$$\begin{aligned} w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

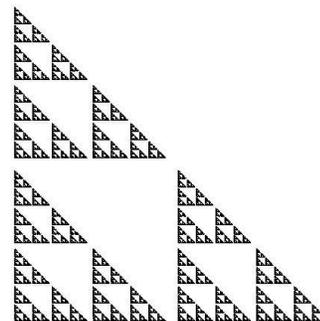


f) L'ensemble  $H$  suivant :

$$H = w_1(H) \cup w_2(H) \cup w_3(H)$$

où

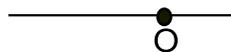
$$\begin{aligned} w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.48 & 0 \\ 0 & 0.48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.48 & 0 \\ 0 & 0.48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.48 & 0 \\ 0 & 0.48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



### 1.1.3 Dimension de similitude

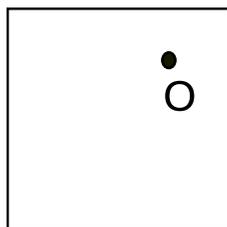
On a l'habitude de penser à la notion de **dimension** en termes de **degrés de liberté** (nombre de directions indépendantes ou nombre d'informations nécessaires pour localiser un point).

Segment



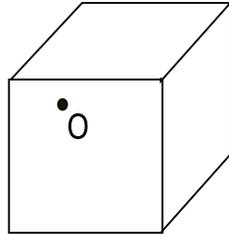
1 information (distance du point à un point de référence O) suffit

Carré



2 informations suffisent

Cube



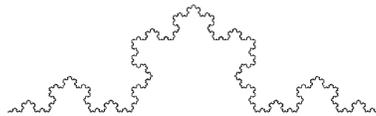
3 informations suffisent

Courbe différentiable



1 information suffit pour localiser un point  $x$  sur la courbe : la longueur (qui pourrait être positive ou négative selon l'orientation choisie) de la portion de la courbe entre  $O$  et  $x$  où  $O$  est un point de référence sur la courbe.

Courbe de von Koch



1 information ne suffit pas (pourquoi?). 2 informations suffiraient, mais c'est "beaucoup", après tout nous avons une courbe!

Il y a une autre façon de voir la dimension pour des objets auto-similaires.

**Dimension 1 :**

Segment

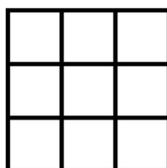


$$\begin{aligned} N &= 3 \\ s &= 3 \end{aligned}$$

$$N = s^1$$

**Dimension 2 :**

Carré

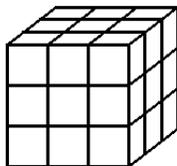


$$\begin{aligned} N &= 9 \\ s &= 3 \end{aligned}$$

$$N = s^2$$

**Dimension 3 :**

Cube



$$N = 27$$

$$s = 3$$

$$N = s^3$$

Peu importe le facteur de dilatation  $s$ , on aura toujours

$$N = s^d, \text{ où } d \text{ est la dimension.}$$

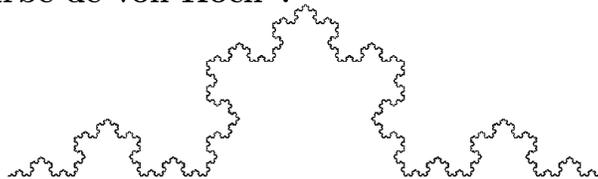
L'égalité  $N = s^d$  s'écrit aussi sous la forme

$$d = \frac{\log N}{\log s}$$

**Définition 1.1.10.** La *dimension de similitude* d'un objet auto-similaire se décomposant en  $N$  parties similaires à l'objet par un facteur de dilatation  $s$  est

$$d = \frac{\log N}{\log s}.$$

Pour les objets comme le segment, le carré et le cube, la dimension de similitude coïncide avec la dimension usuelle.

**Dimension de la courbe de von Koch :**

On a  $N = 4$  et  $s = 3$ . Ainsi

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.261859 \dots$$

On a aussi  $N = 16$  lorsque  $s = 9$  et donc

$$d = \frac{\log 16}{\log 9} = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

Plus généralement,  $d = \frac{\log 4^k}{\log 3^k} = \frac{\log 4}{\log 3}$ .

Nous allons généraliser la définition de dimension de similitude aux objets dont le facteur de dilatation n'est pas le même pour toutes les parties similaires de celui-ci. En fait, cela n'est possible que pour des ensembles auto-similaires dont les parties similaires "ne se chevauchent pas trop". C'était d'ailleurs une hypothèse implicite de la définition 1.1.10.

1. **Aucun chevauchement** L'ensemble  $H$  de l'exemple 1.1.9 f) a cette propriété, car les parties  $w_1(H)$ ,  $w_2(H)$  et  $w_3(H)$  sont disjointes.
2. **Chevauchement acceptable** L'ensemble  $F$  de l'exemple 1.1.9 d) a cette propriété, car les parties  $w_1(F)$  et  $w_3(F)$  ne font que s'effleurer alors que  $w_2(F)$  est disjointe des deux autres parties.
3. **Trop de chevauchement** Pour l'ensemble  $G$  de l'exemple 1.1.9 e), il y a trop de chevauchement, car il y a interpénétration entre les parties  $w_1(G)$  et  $w_2(G)$  ainsi qu'entre  $w_2(G)$  et  $w_3(G)$ .

Nous allons maintenant rendre plus rigoureuse cette notion de chevauchement. Soit  $F$  un ensemble auto-similaire, c'est-à-dire  $F = w_1(F) \cup w_2(F) \cup \dots \cup w_N(F)$  où  $w_1, \dots, w_N$  sont des similitudes.

**Définition 1.1.11.** Nous dirons que les parties similaires  $w_1(F), \dots, w_N(F)$  *ne se chevauchent pas trop* si  $F$  vérifie la propriété O suivante :

**Propriété O :** Il existe un ensemble ouvert  $V$  tel que

$$V \supset w_1(V) \cup \dots \cup w_N(V)$$

et tel que les  $w_i(V)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , soient disjoints.

**Exemple 1.1.12.** Les ensembles des cas 1 et 2 présentés précédemment ont cette propriété, car si on prend pour  $V$  le carré unité ouvert  $V = \{(x, y) \mid 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1\}$ , on a, pour ces deux cas,  $V \supset w_1(V) \cup w_2(V) \cup w_3(V)$  et les  $w_i(V)$  sont disjoints.

Par contre, l'ensemble du cas 3 n'a pas cette propriété, car on a toujours  $w_1(V) \cap w_2(V) \neq \phi$  et  $w_2(V) \cap w_3(V) \neq \phi$  quel que soit l'ensemble ouvert  $V \neq \phi$  tel que  $V \supset w_1(V) \cup w_2(V) \cup w_3(V)$ .

**Définition 1.1.13.** Soit  $F$  un ensemble auto-similaire tel que

$$F = w_1(F) \cup \dots \cup w_N(F)$$

où  $w_1, \dots, w_N$  sont des similitudes de rapport  $r_1, \dots, r_N$  respectivement. Si  $F$  vérifie la propriété O, sa *dimension de similitude* est le nombre  $d$  vérifiant

$$r_1^d + r_2^d + \dots + r_N^d = 1.$$

**Exemples 1.1.14.**

**a) Le carré**

Pour le carré, voir l'exemple 1.1.9 a), on a quatre similitudes de rapports  $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \frac{1}{2}$ . Sa dimension de similitude  $d$  vérifie donc

$$\left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1$$

d'où

$$4 \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^d = \frac{1}{4}$$

et donc  $d = 2$ .

**b) Le triangle de Sierpinski**

On a trois similitudes de rapport  $\frac{1}{2}$ . Ainsi, la dimension  $d$  est la solution de  $3 \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1$ ,

c'est-à-dire  $d = \frac{\ln 3}{\ln 2}$ .

**c)** Pour l'ensemble de l'exemple 1.1.9 d), on a deux similitudes de rapport  $\frac{1}{2}$  et une de rapport 0.4. Donc la dimension de similitude  $d$  de cet ensemble est la solution de

$$\left(\frac{1}{2}\right)^d + (0.4)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1.$$

En utilisant, par exemple, la commande `fsolve` de Maple, on trouve  $d = 1.44585\dots$

**d)** Pour l'ensemble de l'exemple 1.1.9 f), on a trois similitudes de rapport 0.48. Ainsi sa dimension de similitude  $d$  vérifie

$$(0.48)^d + (0.48)^d + (0.48)^d = 1,$$

d'où

$$3(0.48)^d = 1$$

c'est-à-dire

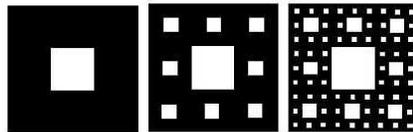
$$d = -\frac{\ln 3}{\ln 0.48} = \frac{\ln 3}{\ln(1/0.48)}.$$

### 1.1.4 Exercices

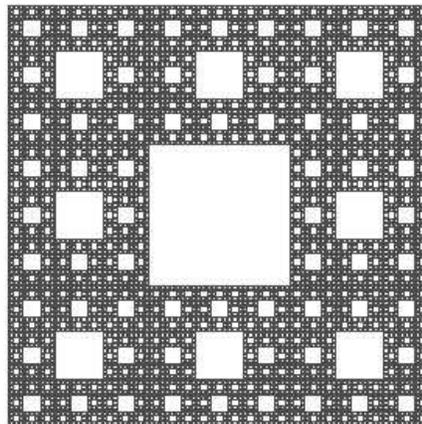
1. Montrer que chacun des ensembles suivants vérifie la propriété O.

a) Tapis de Sierpinski

Premières étapes :



et en itérant...

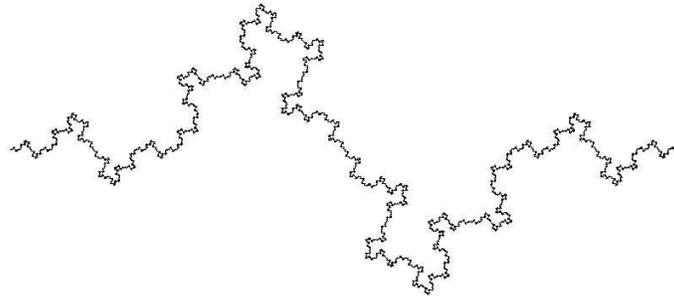


b) Courbe de Von Koch

c)



d)



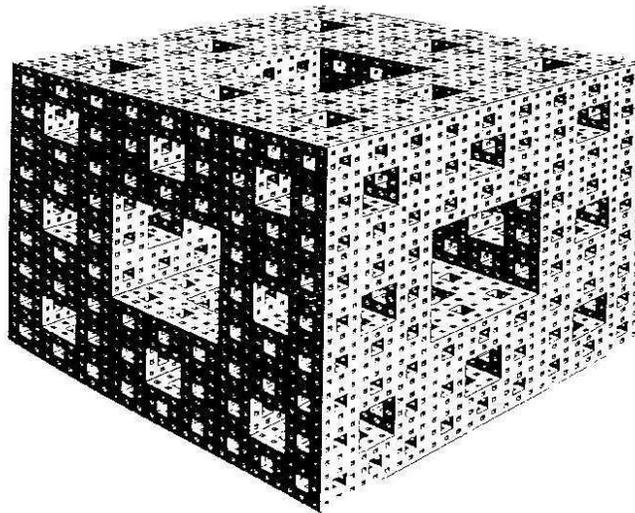
2. Déterminer la dimension de chacun des ensembles suivants.

- a) Triangle de Sierpinski
- b) Tapis de Sierpinski
- c) Éponge de Menger

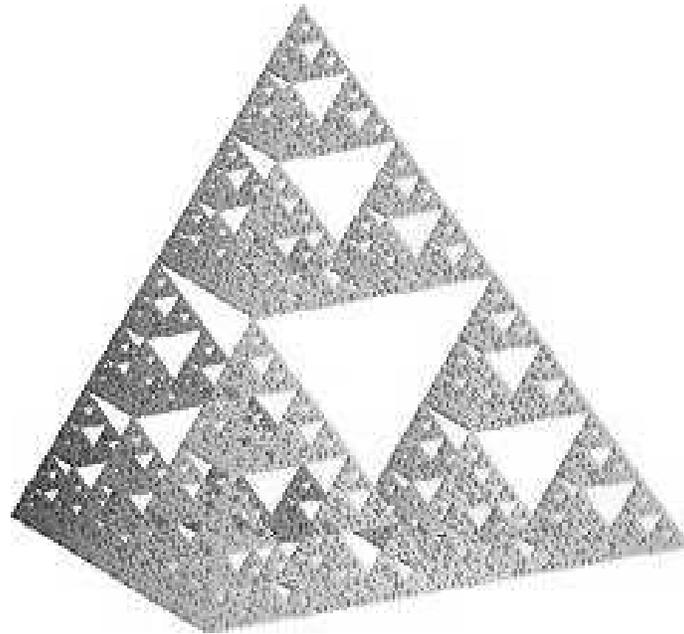
Premières étapes :



et en itérant...



## d) Tétrahédre



## 1.2 Principe de contraction

### 1.2.1 Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$

Avant d'énoncer le théorème du point fixe dans  $\mathbb{R}$ , on énonce quelques définitions et résultats fondamentaux en analyse réelle.

**Définition 1.2.1.** Une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  est une *suite de Cauchy* si

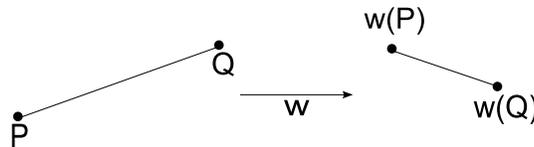
$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} |x_m - x_n| = 0.$$

**Remarque.** De façon équivalente, cela s'écrit : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $|x_n - x_m| \leq \varepsilon$  si  $m$  et  $n \geq N_0$ .

**Propriété de complétude :**  $\mathbb{R}$  est *complet*, c'est-à-dire toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente.

**Définition 1.2.2.** On dit que  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une *contraction de facteur  $k$*  s'il existe  $k$  tel que  $0 \leq k < 1$  et

$$|g(x) - g(y)| \leq k|x - y| \quad \forall x \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}.$$



Puisque  $k < 1$ , la distance entre  $w(P)$  et  $w(Q)$  est plus petite que la distance entre  $P$  et  $Q$ .

**Notation.** Désignons par  $g^n = \underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{n \text{ fois}}$  la fonction obtenue en composant  $n$  fois  $g$  avec elle-même.

**Théorème 1.2.3 (Point fixe).** Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une contraction de facteur  $k$  ( $0 \leq k < 1$ ).

Alors,

- (i) Il existe un unique point fixe  $\bar{x}$  (c'est-à-dire un unique  $\bar{x}$  tel que  $g(\bar{x}) = \bar{x}$ ).
- (ii) Quel que soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ , la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $x_n = g^n(x_0)$  converge vers  $\bar{x}$  et, en outre, on a

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0|. \quad (*)$$

*Démonstration.*

- (a) Montrons que si un point fixe existe, il est nécessairement unique. Supposons qu'il existe deux points fixes distincts  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$ , c'est-à-dire  $g(\bar{x}) = \bar{x}$ ,  $g(\bar{y}) = \bar{y}$  et  $\bar{x} \neq \bar{y}$ .

Puisque  $g$  est une contraction de facteur  $k$ , on a

$$|g(\bar{x}) - g(\bar{y})| \leq k|\bar{x} - \bar{y}|, \text{ mais } g(\bar{x}) = \bar{x} \text{ et } g(\bar{y}) = \bar{y},$$

d'où on aurait  $|\bar{x} - \bar{y}| \leq k|\bar{x} - \bar{y}|$ , ce qui est impossible si  $\bar{x} \neq \bar{y}$  car  $0 \leq k < 1$ .

- (b) Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ , puisque  $\mathbb{R}$  est complet pour montrer la convergence de la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $x_n = g^n(x_0)$ , il suffit de montrer que c'est une suite de Cauchy. Montrons d'abord les deux inégalités : soient  $n$  et  $p \in \mathbb{N}$ , on a

$$(1) \quad |x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$$

$$(2) \quad |x_{n+p} - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|$$

**Preuve de (1)** Puisque  $|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$ ,  $\forall x, \forall y \in \mathbb{R}$  et ayant  $x_m = g(x_{m-1})$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ , on obtient

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |g(x_n) - g(x_{n-1})| \\ &\leq k|x_n - x_{n-1}| = k|g(x_{n-1}) - g(x_{n-2})| \\ &\leq k^2|x_{n-1} - x_{n-2}|, \quad \text{etc.} \\ &\leq k^n|x_1 - x_0| \end{aligned}$$

**Preuve de (2)** En utilisant l'inégalité triangulaire à répétition on obtient

$$|x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \dots + |x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_n|$$

et d'après (1), on déduit

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq k^{n+p-1}|x_1 - x_0| + k^{n+p-2}|x_1 - x_0| + \dots + k^{n+1}|x_1 - x_0| + k^n|x_1 - x_0| \\ &\leq k^n(1 + k + \dots + k^{p-1})|x_1 - x_0| \end{aligned}$$

Mais, ayant  $0 \leq k < 1$ , on a  $\frac{1}{1-k} = 1 + k + k^2 + \dots + k^{p-1} + k^p + \dots$  d'où  $1 + k + \dots + k^{p-1} < \frac{1}{1-k}$ . On obtient donc

$$|x_{n+p} - x_n| \leq k^n(1 + k + \dots + k^{p-1})|x_1 - x_0| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$$

c'est-à-dire l'inégalité (2).

Si  $m$  et  $n$  sont des entiers positifs, on déduit

$$|x_m - x_n| \leq \frac{k^{\min(m,n)}}{1-k}|x_1 - x_0| \quad \text{d'où}$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} |x_m - x_n| = 0$$

et donc la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy. Puisque  $\mathbb{R}$  est complet, elle est convergente. Désignons par  $\bar{x}$  la limite de la suite.

Montrons que  $\bar{x}$  est un point fixe de  $g$ . Puisque  $g$  est une contraction,  $g$  est continue. Ainsi, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = g(\bar{x})$$

Mais

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad \text{d'où } \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \bar{x}$$

et donc  $g(\bar{x}) = \bar{x}$ . En outre, d'après (a), ce point fixe est unique. Il ne reste donc qu'à démontrer l'inégalité (\*).

Pour tout  $n$  et tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a d'après l'inégalité (2)

$$|x_n - x_{n+p}| = |x_{n+p} - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|$$

d'où

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |x_n - x_{n+p}| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|.$$

Mais  $\lim_{p \rightarrow \infty} |x_n - x_{n+p}| = |x_n - \bar{x}|$  car  $\lim_{p \rightarrow \infty} x_{n+p} = \bar{x}$ . On obtient donc

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|.$$

□

**Remarque.** L'inégalité (\*) donne une mesure de la vitesse convergence. Étant donné un  $\varepsilon > 0$ , elle permet de déterminer à partir de quel rang  $n$  on aura  $|x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon$ . Il suffit de prendre  $n$  tel que  $\frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon$  (ce qui est possible, car  $0 \leq k < 1$ ).

**Remarque.** Dans  $\mathbb{R}^n$ , tout comme dans  $\mathbb{R}$ , toute suite de Cauchy converge. Ainsi, dans la preuve précédente, il suffirait que de remplacer  $|x - y|$  par  $d(x, y)$  pour avoir une version du théorème du point fixe dans  $\mathbb{R}^n$ . Par ailleurs, il existe d'autres ensembles à l'intérieur desquels toute suite de Cauchy converge. Dans la prochaine section, on énonce un résultat analogue au théorème du point fixe pour ces ensembles particuliers.

## 1.2.2 Principe de contraction dans les espaces métriques complets

**Définition 1.2.4.** Soit  $X$  un ensemble. Une *distance* (ou *métrique*)  $d$  sur  $X$  est une application

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) \quad \text{telle que} \end{aligned}$$

- (i)  $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x \forall y \in X$  ;
- (ii)  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$  ;
- (iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité triangulaire)  $\forall x \forall y \forall z \in X$  ;
- (iv)  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x \forall y \in X$ .

On dit alors que  $X$ , muni de la distance  $d$ , est un *espace métrique*.

### Exemples 1.2.5.

a)  $\mathbb{R}$  avec la distance usuelle  $d$  définie par  $d(x, y) = |x - y|$  est un espace métrique.

b) Dans  $\mathbb{R}^2$ , plusieurs distances peuvent être définies.

i)  $\mathbb{R}^2$  avec la distance euclidienne  $d_2$ , qui est définie par

$$d_2(S, T) = \sqrt{(s_1 - t_1)^2 + (s_2 - t_2)^2} \quad \text{où } S = (s_1, s_2), \quad T = (t_1, t_2),$$

est un espace métrique.

ii)  $\mathbb{R}^2$  avec la distance donnée par  $d_\infty(S, T) = \max\{|s_1 - t_1|, |s_2 - t_2|\}$  est un espace métrique.

iii)  $\mathbb{R}^2$  avec la distance Manhattan  $d_1$ , qui est définie par

$$d_1(S, T) = |s_1 - t_1| + |s_2 - t_2|,$$

est un espace métrique.

iv) Plus généralement, pour  $1 < p < \infty$ , on peut définir la distance  $d_p$  par

$$d_p(S, T) = (|s_1 - t_1|^p + |s_2 - t_2|^p)^{1/p}.$$

$\mathbb{R}^2$  avec la distance  $d_p$  est un espace métrique.

c) Toutes ces distances peuvent être définies de façon analogue dans  $\mathbb{R}^n$ .

i)  $\mathbb{R}^n$  avec la distance euclidienne  $d_2$ , qui est définie par

$$d_2(S, T) = \sqrt{(s_1 - t_1)^2 + (s_2 - t_2)^2 + \cdots + (s_n - t_n)^2}$$

où  $S = (s_1, \dots, s_n)$ ,  $T = (t_1, \dots, t_n)$ , est un espace métrique.

ii)  $\mathbb{R}^n$  avec la distance  $d_p$ , qui est définie par

$$d_p(S, T) = \left( \sum_{i=1}^n |s_i - t_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

où  $S = (s_1, \dots, s_n)$ ,  $T = (t_1, \dots, t_n)$  et  $1 < p < \infty$ , est un espace métrique.

d) Soit  $\Sigma$  l'ensemble des suites formées de 0 et de 1, c'est-à-dire

$$\Sigma = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, \dots) \mid s_i = 0 \text{ ou } 1\}.$$

Si  $s = (s_0, s_1, \dots, s_n, \dots)$  et  $t = (t_0, t_1, \dots, t_n, \dots) \in \Sigma$ , on définit

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

**Définition 1.2.6.** Soit  $X$  un espace métrique avec la distance  $d$ . On dit qu'une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $X$  est une *suite de Cauchy* si

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0.$$

**Définition 1.2.7.** On dit qu'un espace métrique  $X$  est *complet* si toute suite de Cauchy d'éléments de  $X$  est convergente.

Tous les espaces métriques des exemples précédents sont complets.

**Définition 1.2.8.** Soient  $X$  un espace métrique avec une distance  $d$  et  $g : X \rightarrow X$ . On dit que  $g$  est une *contraction de facteur  $k$*  s'il existe  $k$  tel que  $0 \leq k < 1$  et

$$d(g(x), g(y)) \leq k d(x, y) \quad \forall x \in X \quad \text{et} \quad \forall y \in X.$$

Dans les espaces métriques complets, le principe de contraction est vrai, c'est-à-dire on a le résultat suivant qui est l'analogie pour les espaces métriques du théorème du point fixe dans  $\mathbb{R}$  (théorème 1.2.3).

**Théorème 1.2.9** (Principe de contraction). *Soit  $X$  un espace métrique complet avec la distance  $d$  et soit  $g : X \rightarrow X$  une contraction de facteur  $k$  ( $0 \leq k < 1$ ). Alors,*

- (i) *il existe un unique point fixe  $\bar{x}$  de  $g$  ;*
- (ii) *quel que soit  $x_0 \in X$ , la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $x_n = g^n(x_0)$  converge vers  $\bar{x}$  et*

$$d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{k^n}{1 - k} d(x_1, x_0).$$

*Démonstration.* La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème du point fixe dans  $\mathbb{R}$  et est laissée en exercice. □

### 1.2.3 Exercices

1. Montrer que  $d_1$  et  $d_\infty$  sont des distances sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Montrer que

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

est une distance sur  $\Sigma$ .

3. Démontrer le principe de contraction (théorème 1.2.9).

## 1.3 Systèmes itératifs de fonctions

### 1.3.1 Espace métrique idoine

Nous nous intéressons ici aux fractals dans  $\mathbb{R}^2$ . On procéderait de la même façon pour les fractals dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.3.1.** Un ensemble  $K \subset \mathbb{R}^2$  est *compact* s'il est fermé et borné.

Nous allons considérer l'ensemble suivant :

$$\mathcal{K} = \{K \mid K \text{ est un sous-ensemble compact de } \mathbb{R}^2\},$$

c'est-à-dire les éléments de  $\mathcal{K}$  sont les sous-ensembles compacts de  $\mathbb{R}^2$ . Nous définirons une distance sur  $\mathcal{K}$  : la distance de Hausdorff.

#### Distance de Hausdorff

Au début du siècle, le mathématicien allemand Felix Hausdorff a introduit une distance sur l'ensemble  $\mathcal{K}$ , c'est-à-dire une notion de distance entre deux sous-ensembles compacts  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}^2$ .

On procède comme suit. Si  $K \subset \mathbb{R}^2$  est compact et  $\varepsilon > 0$ , on définit le  $\varepsilon$ -voisinage  $K_\varepsilon$  de  $K$  par

$$K_\varepsilon = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, Q) \leq \varepsilon \text{ pour un certain } Q \in K\},$$

où  $d$  est la distance sur  $\mathbb{R}^2$  (e.g.  $d_1, d_2, d_\infty, d_p, \dots$ )

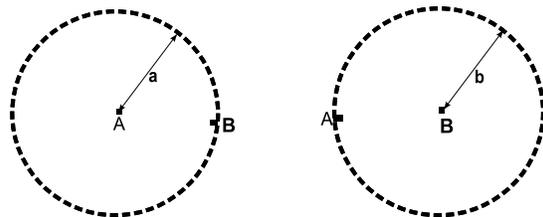
Soient  $A$  et  $B \in \mathcal{K}$  (c'est-à-dire deux sous-ensembles compacts de  $\mathbb{R}^2$ ). La distance de Hausdorff  $h(A, B)$  entre  $A$  et  $B$  est définie par

$$h(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset B_\varepsilon \text{ et } B \subset A_\varepsilon\}.$$

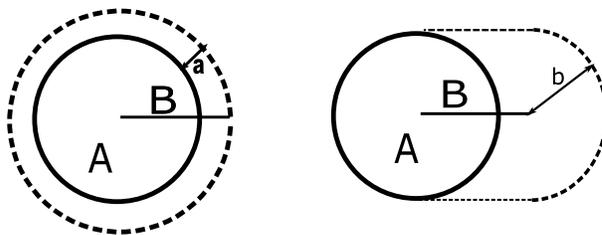
Pour obtenir  $h(A, B)$ , on calcule  $a = \inf\{\varepsilon > 0 \mid B \subset A_\varepsilon\}$  et  $b = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset B_\varepsilon\}$ . Alors, on a  $h(A, B) = \max\{a, b\}$ .

Les figures suivantes illustrent ces quantités  $a$  et  $b$  lorsque

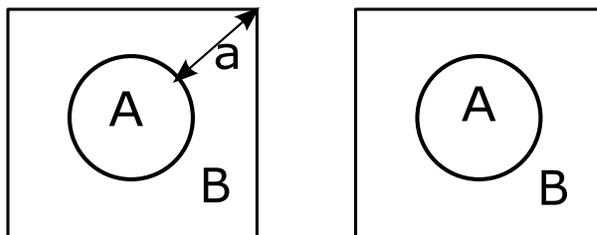
(a)  $A$  et  $B$  sont des points (dans ce cas  $h(A, B)$  est la distance usuelle entre 2 points)



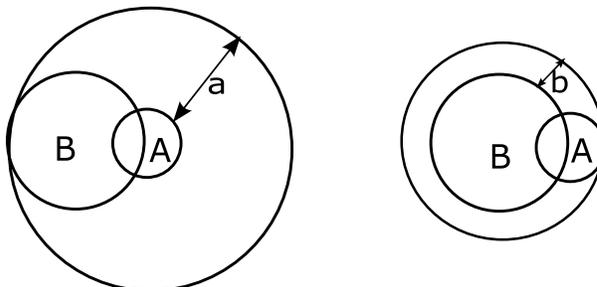
(b)  $A$  un disque et  $B$  un segment de droite



(c)  $A$  un disque inclus dans un carré  $B$   
(ici on a  $b = 0$  car  $A \subset B$ )



(d)  $A$  et  $B$  sont deux disques se rencontrant



**Théorème 1.3.2** (Hausdorff). *L'ensemble  $\mathcal{K}$  est un espace métrique complet avec la distance  $h$  de Hausdorff.*

**Remarque.** En particulier, le principe de contraction est vrai pour l'ensemble  $\mathcal{K}$  muni de la distance  $h$ .

### 1.3.2 Théorèmes de l'ensemble fixe et de collage

**Définition 1.3.3.** Un *système itératif de fonctions (SIF)* dans le plan est une famille finie  $\{w_1, \dots, w_N\}$  de fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $\{w_1, \dots, w_N\}$  un SIF. Désignons par  $W(E) = w_1(E) \cup w_2(E) \cup \dots \cup w_N(E)$  où  $E$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ . Comme on le fait pour les fonctions, on peut itérer  $W$  :

$$\begin{aligned} E_0 & : \text{un sous-ensemble de } \mathbb{R}^2 \\ E_1 & = W(E_0) = w_1(E_0) \cup \dots \cup w_N(E_0) \\ E_2 & = W(E_1) = W(W(E_0)) = W^2(E_0) \\ & \vdots \\ E_n & = W^n(E_0) \end{aligned}$$

**Théorème 1.3.4** (Hutchinson). *Soit  $\{w_1, \dots, w_N\}$  un SIF où  $w_1, \dots, w_N$  sont des contractions sur  $\mathbb{R}^2$  de facteurs  $k_1, \dots, k_N$ . Alors,  $W$  est une contraction sur  $\mathcal{K}$  de facteur  $k$  où  $k = \max(k_1, \dots, k_N)$  et*

- (i) *il existe un unique ensemble fixe  $\bar{A}$  de  $W$ , c'est-à-dire tel que  $W(\bar{A}) = \bar{A}$  (ou encore  $\bar{A} = w_1(\bar{A}) \cup w_2(\bar{A}) \cup \dots \cup w_N(\bar{A})$ );*
- (ii) *pour tout sous-ensemble compact  $A_0 \subset \mathbb{R}^2$ , la suite  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de sous-ensembles compacts de  $\mathbb{R}^2$  définis par  $A_n = W^n(A_0)$  converge vers  $\bar{A}$ , c'est-à-dire  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(A_n, \bar{A}) = 0$ .*

*En outre, on a*

$$h(A_n, \bar{A}) \leq \frac{k^n}{1-k} h(A_1, A_0) \quad \forall n,$$

*ce qui s'écrit aussi comme (car  $A_1 = W(A_0)$ )*

$$h(A_n, \bar{A}) \leq \frac{k^n}{1-k} h(W(A_0), A_0) \quad \forall n. \quad (1.1)$$

*En particulier, pour  $n = 0$ , on obtient*

$$h(A_0, \bar{A}) \leq \frac{1}{1-k} h(W(A_0), A_0). \quad (1.2)$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $W : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  est une contraction. Ensuite, on peut appliquer le théorème du point fixe puisque  $\mathcal{K}$  est un espace métrique complet.  $\square$

**Théorème 1.3.5** (Collage). *Soient  $L \in \mathcal{K}$  et  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\{w_1, \dots, w_N\}$  un SIF où  $w_1, \dots, w_N$  sont des contractions de facteurs  $k_1, \dots, k_N$  telles que*

$$h(W(L), L) \leq \varepsilon.$$

*Alors, si  $\bar{A}$  est l'ensemble fixe de  $W$ , on a*

$$h(L, \bar{A}) \leq \frac{\varepsilon}{1-k} \text{ où } k = \max\{k_1, \dots, k_N\}.$$

*Démonstration.* En prenant  $A_0 = L$  dans l'équation 1.2, on obtient

$$\begin{aligned} h(L, \bar{A}) &\leq \frac{1}{1-k} h(W(L), L) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1-k} \quad \text{car } h(W(L), L) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

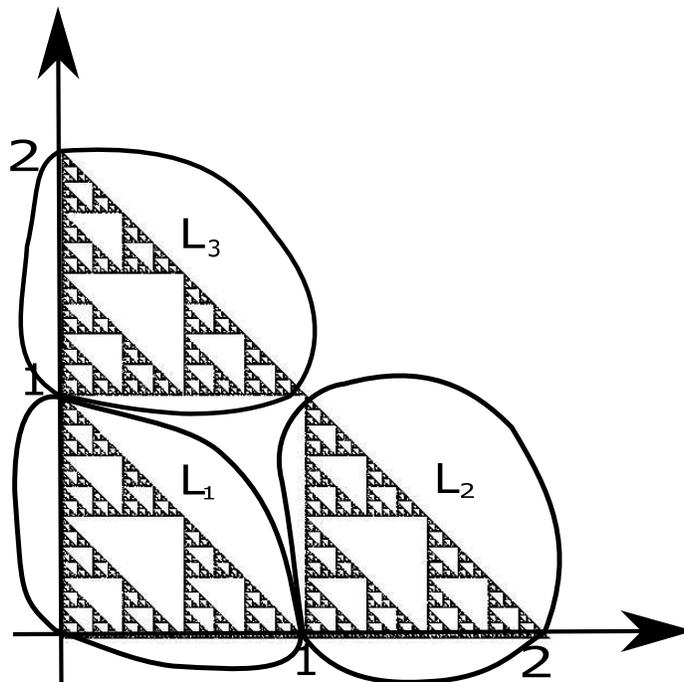
$\square$

En pratique, on utilise le théorème de collage pour approximer un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^2$  (un fractal par exemple!) comme suit.

Soit  $L$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^2$ . Si on réussit à trouver un SIF  $\{w_1, \dots, w_N\}$  de contractions telles que  $L \approx W(L) = w_1(L) \cup \dots \cup w_N(L)$ , c'est-à-dire  $h(W(L), L)$  est petit, alors l'ensemble fixe  $\bar{A}$  du SIF sera une bonne approximation de  $L$ , c'est-à-dire  $h(L, \bar{A})$  sera petit.

**Exemple 1.3.6.** Comment obtenir un SIF pour le triangle de Sierpinski ?

Soit  $L$  l'ensemble illustré ci-dessous. Désignons par  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  les trois portions de  $L$  encerclées. Nous avons  $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ .



Soient

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{d'où } w_1(L) = L_1$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où } w_2(L) = L_2$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où } w_3(L) = L_3$$

Ainsi,  $L = w_1(L) \cup w_2(L) \cup w_3(L)$  et donc l'ensemble fixe  $A$  de ce SIF est presque égal à  $L$  (en fait ici,  $L$  sera égal à  $A$ ).

### 1.3.3 Méthodes de construction

#### Un premier algorithme

Soient  $w_1, \dots, w_N$  des contractions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

- On choisit un point de départ  $P_0$ .
- On calcule

$$W(P_0) = w_1(P_0) \cup \dots \cup w_N(P_0),$$

puis

$$W^2(P_0) = W(W(P_0))$$

...

$$W^n(P_0) \dots, \text{etc.}$$

Pour  $n$  assez grand,  $W^n(P_0)$  est une approximation de l'ensemble fixe  $A$  (d'après le théorème de l'ensemble fixe).

Cependant, cet algorithme n'est pas très efficace car il exige beaucoup de calculs!

- 1<sup>ère</sup> étape : on calcule  $N$  points.
- 2<sup>ème</sup> étape : on calcule  $N^2$  points.
- 3<sup>ème</sup> étape : on calcule  $N^3$  points.
- ⋮
- $n$ <sup>ème</sup> étape : on calcule  $N^n$  points.

Ça augmente vite!

Pour remédier à ce problème, on procède comme suit.

#### Un deuxième algorithme (Algorithme stochastique)

Considérons un SIF  $\{w_1, \dots, w_N\}$  et attachons à chaque  $w_i$  une probabilité  $p_i$  de telle sorte que  $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$ .

- Choisissons un point de départ  $Q_0$ .
- On choisit au hasard une des fonctions  $w_i$  (la probabilité que  $w_i$  soit choisie est  $p_i$ ) et on calcule  $Q_1 = w_i(Q_0)$ .
- On choisit au hasard une des fonctions  $w_i$  et on calcule

$$Q_2 = w_i(Q_1)$$

- Etc.

On peut montrer que la suite des itérés  $\{Q_n\}$  finit par “recouvrir” l’ensemble fixe  $A$ .

### SIF avec probabilités

**Définition 1.3.7.** Un *SIF avec probabilités* est un SIF  $\{w_1, \dots, w_N\}$  avec des probabilités  $p_1, \dots, p_N$  attachées aux fonctions  $w_1, \dots, w_N$ .

Pour le triangle de Sierpinski, on avait

$$\begin{aligned} w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Attachons les probabilités 0.33, 0.33 et 0.34 à  $w_1$ ,  $w_2$  et  $w_3$  respectivement. On obtient un SIF avec probabilités que l’on peut représenter sous forme de tableau.

$i$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$p$
1	0.5	0	0	0.5	0	0	0.33
2	0.5	0	0	0.5	1	0	0.33
3	0.5	0	0	0.5	0	1	0.34

Dans le programme **Fractint** que nous utiliserons ce SIF avec probabilités s’écrira sous la forme

```
Sierpinski{; “commentaires”
0.5 0.0 0.0 0.5 0.0 0.0 0.33
0.5 0.0 0.0 0.5 1.0 0.0 0.33
0.5 0.0 0.0 0.5 0.0 1.0 0.34
}
```

Avec cette méthode, on arrive à construire des fractals de la nature.

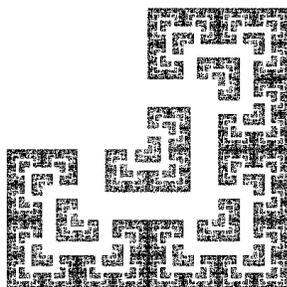


Le SIF avec probabilités donnant cette fougère est donné dans le tableau.

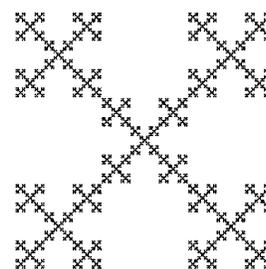
$i$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$p$
0	0	0	0	0.16	0	0	0.01
1	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
2	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
3	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07

### 1.3.4 Exercices

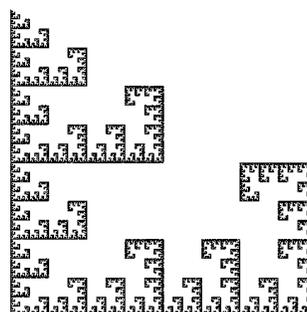
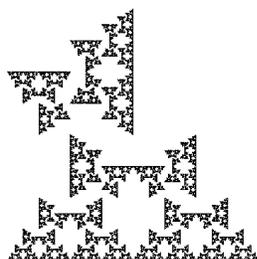
1. Montrer que  $h$  est bien une distance, c'est-à-dire vérifie les quatre propriétés d'une distance.
2. Soit  $\{w_1, \dots, w_N\}$  un SIF où  $w_1, \dots, w_N$  sont des contractions sur  $\mathbb{R}^2$  de facteurs  $k_1, \dots, k_N$ . Montrer que  $W : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  est une contraction de facteur  $k = \max(k_1, \dots, k_N)$ .
3. Construire les ensembles suivants.



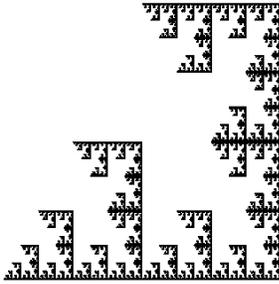
(a)



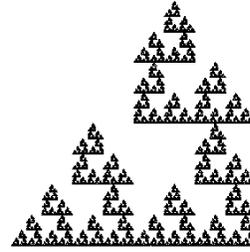
(b)



(c)



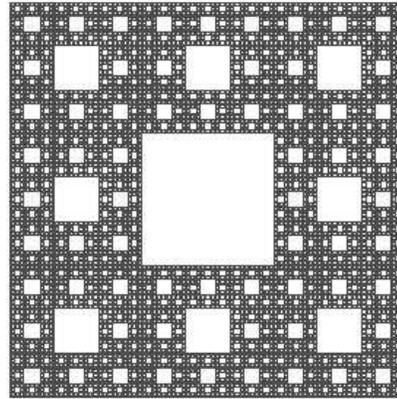
(d)



(e)



(f)



(g)



(h)

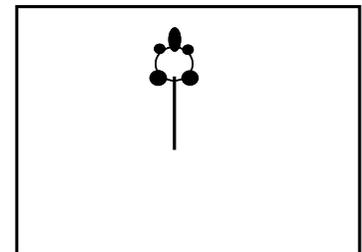
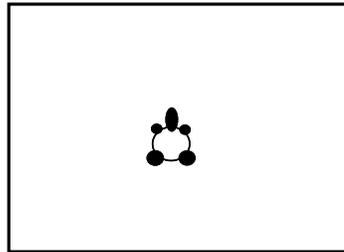


## 1.4 L-systèmes

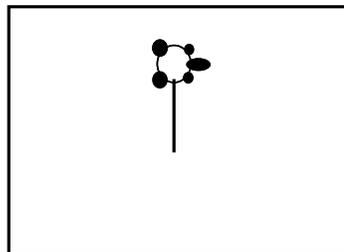
### 1.4.1 Graphiques avec l'aide de la tortue du langage LOGO

Dans le langage LOGO, on peut donner à la tortue les commandes suivantes (parmi d'autres) :

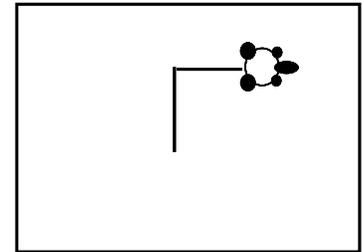
- Avance (Forward)
- Recule (Back)
- Tourne à droite (Right)
- Tourne à gauche (Left)



Avance



Tourne à droite



Avance

#### Construction de la courbe de von Koch avec la tortue

Pour construire la courbe de von Koch avec la tortue, on lui donne les instructions suivantes :

$F$  : avance d'une distance donnée.

$+$  : tourne à gauche (c'est-à-dire sens anti-horaire) d'un angle de  $60^\circ$ .

$-$  : tourne à droite (c'est-à-dire sens horaire) d'un angle de  $60^\circ$ .

(i) On commence avec  $F$  (ce sera notre **axiome**).



**L -systèmes avec xfractint**

Voici l'interprétation graphique des caractères lorsqu'on utilise le programme Fractint :

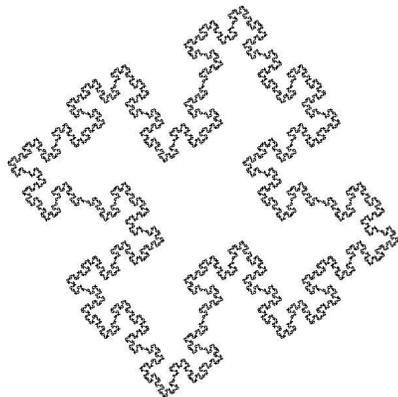
F (ou f)	: avance et trace le segment de droite
G (ou g)	: avance sans tracer le segment
+	: tourne à gauche (sens anti-horaire) d'un angle $2\pi/n$
-	: tourne à droite (sens horaire) d'un angle $2\pi/n$
	: tourne de $180^\circ$
[	: enregistre l'état de la tortue
]	: retourne à l'état de la tortue correspondant au dernier [

Ce sont là les principaux caractères utilisés par Fractint, nous nous limiterons à ceux-ci. Mais signalons que Fractint utilise aussi les caractères suivants :  $D$ ,  $M$ ,  $\backslash$ ,  $/$ ,  $\subset$ ,  $<$ ,  $>$ ,  $!$  et  $@$  dont vous trouverez la signification dans la documentation de Fractint. Tous les autres caractères sont ignorés par la tortue.

Dans Fractint, les  $L$ -systèmes sont donnés sous la forme suivante : par exemple, pour la courbe de von Koch, on aurait

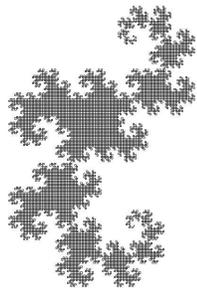
```
von_Koch { ; commentaires
Angle 6
Axiome F
F = F + F - -F + F
}
```

(Angle 6 : signifie que l'on prend l'angle égal à  $2\pi/6 = \pi/3$  (c'est-à-dire  $60^\circ$ ).)

**Exemples 1.4.3.****a) L'île de von Koch**

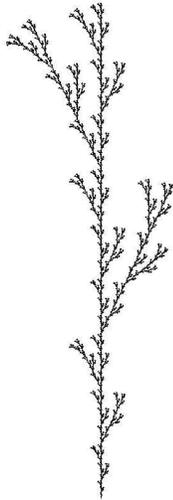
```
Angle 4
Axiome F + F + F + F
F = F + F - F - FF + F + F - F
```

## b) Dragon



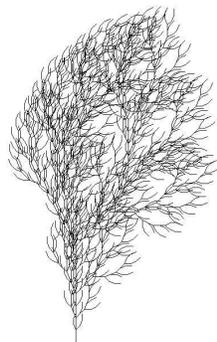
Angle 4  
 Axiome  $X$   
 $X = X - YF -$   
 $Y = +FX + Y$

## c) Plante 1



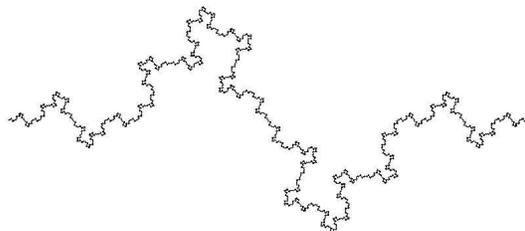
Angle 14  
 Axiome  $F$   
 $F = F[-F]F[+F]F$

## d) Plante 2



Angle 16  
 Axiome  $F$   
 $F = FF - [-F + F + F] + [+F - F - F]$

## e) Une courbe



Angle 6  
 Axiome  $F$   
 $F = F + F - -FF + +F - F$   
 (Quelle est la dimension de cette courbe?)

# Annexe A

## Transformations linéaires ou affines du plan : point de vue géométrique

### A.1 Généralités

**Définition A.1.1.** Une *transformation affine* du plan est une fonction  $w : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  qui, dans la base standard de  $\mathbb{R}^2$ , s'écrit sous la forme

$$(*) \quad w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire une application linéaire suivie d'une translation. Elle est *inversible* si et seulement si  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ .

**Remarque.** On peut montrer qu'une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  est inversible si et seulement si c'est une composition des transformations définies aux sections A.2 et A.3.

#### A.1.1 Propriétés des transformations affines inversibles

1. Une droite est transformée en une droite.
2. Une droite passant par  $(0, 0)$  est transformée en une droite passant par  $(e, f)$ .
3. Des droites parallèles sont transformées en droites parallèles.
4. Un segment est transformé en un segment.
5. Un carré est transformé en un parallélogramme.

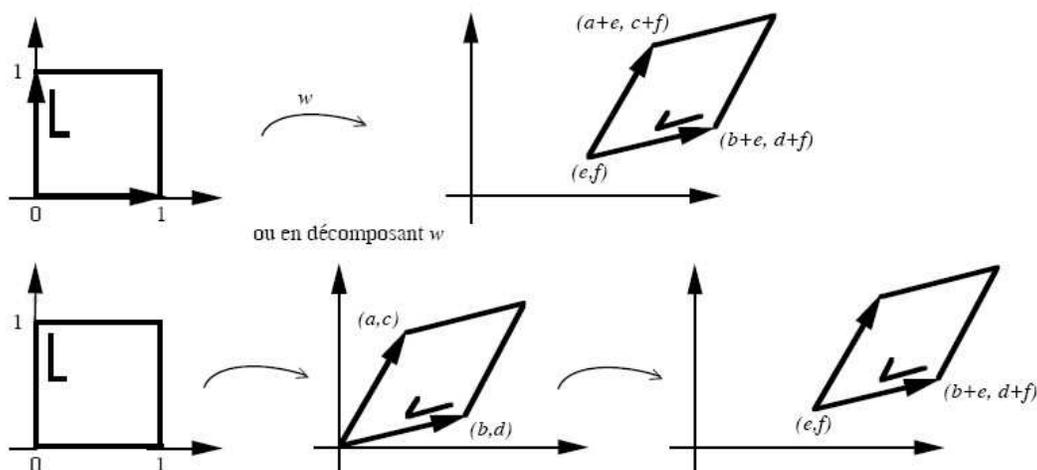
**Exercice A.1.** Démontrer ces propriétés.

### A.1.2 Visualisation géométrique d'une transformation affine

Une manière de visualiser une transformation est de regarder l'image du carré unité  $[0, 1] \times [0, 1]$  par la transformation.

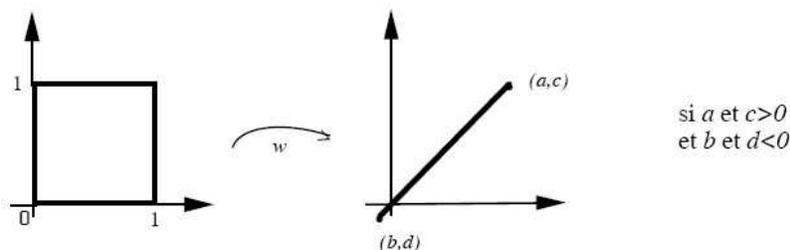
Soit  $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la transformation affine définie par

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$



### A.1.3 Transformations non inversibles

Comme nous le verrons, il peut aussi être utile de considérer une transformation non inversible. Si l'application  $w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$  n'est pas inversible, c'est-à-dire  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$ , on a géométriquement e.g.



## A.2 Similitudes du plan

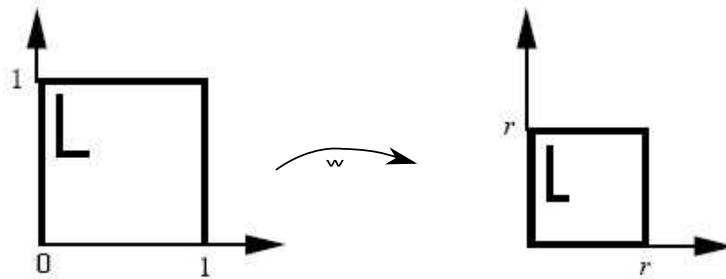
**Définition A.2.1.** Une *similitude* du plan est une application affine  $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  pour laquelle il existe une constante  $k > 0$  telle que

$$\|w(P) - w(Q)\| = k\|P - Q\| \quad \forall P, \forall Q \in \mathbb{R}^2.$$

**Remarque.** Si  $k < 1$ , c'est aussi une contraction (au sens large défini à la section 1.2).

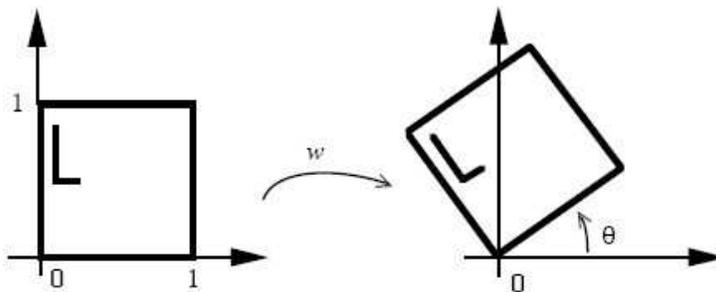
### A.2.1 Homothétie, rotation, réflexion

**Définition A.2.2.** Une *homothétie de centre*  $(0, 0)$  et de *rapport*  $r \in \mathbb{R}$  est une application linéaire de la forme  $w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Lorsque  $0 < r < 1$  (respectivement  $r > 1$ ), on a une *contraction* (respectivement une *dilatation*) *uniforme*.



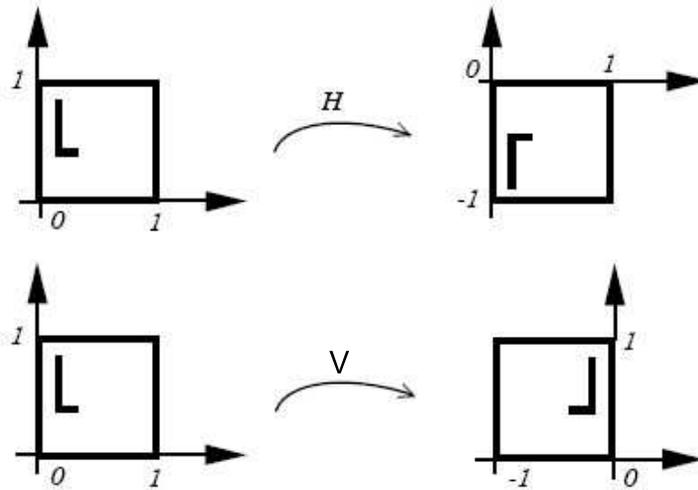
**Définition A.2.3.** Une *rotation (dans le sens anti-horaire)* d'*angle*  $\theta$  est une application linéaire de la forme

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



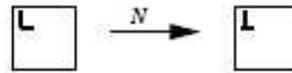
**Définition A.2.4.** Les réflexions par rapport à l'axe des  $x$  et par rapport à l'axe des  $y$  sont données respectivement par

$$H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

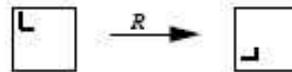


### A.2.2 Symétries du carré et le groupe $D_4$

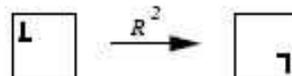
$N$  = Identité



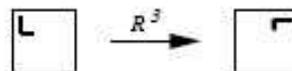
$R$  = Rotation de  $90^\circ$  (anti-horaire)



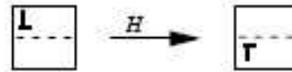
$R^2$  = Rotation de  $180^\circ$



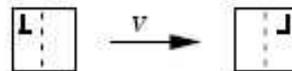
$R^3$  = Rotation de  $270^\circ$



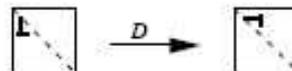
$H$  = Réflexion par rapport à la médiane horizontale



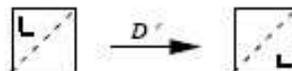
$V$  = Réflexion par rapport à la médiane verticale



$D$  = Réflexion par rapport à la diagonale



$D'$  = Réflexion par rapport à l'autre diagonale



	$N$	$R$	$R^2$	$R^3$	$H$	$V$	$D$	$D'$
$N$	$N$	$R_{90}$	$R^2$	$R^3$	$H$	$V$	$D$	$D'$
$R$	$R$	$R^2$	$R^3$	$N$	$D$	$D'$	$V$	$H$
$R^2$	$R^2$	$R^3$	$N$	$R$	$V$	$H$	$D'$	$D$
$R^3$	$R^3$	$N$	$R$	$R^2$	$D'$	$D$	$H$	$V$
$H$	$H$	$D'$	$V$	$D$	$N$	$R^2$	$R^3$	$R$
$V$	$V$	$D$	$H$	$D'$	$R^2$	$N$	$R$	$R^3$
$D$	$D$	$H$	$D'$	$V$	$R$	$R^3$	$N$	$R^2$
$D'$	$D'$	$V$	$D$	$H$	$R^3$	$R$	$R^2$	$N$

On peut engendrer le groupe  $D_4$  avec  $R$  et  $H$ , c'est-à-dire les 8 transformations s'obtiennent par des compositions de  $R$  et  $H$ .

$$N = R^4 = R \cdot R \cdot R \cdot R \quad \text{ou} \quad N = H^2 = H \cdot H$$

$$R = R$$

$$R^2 = R \cdot R$$

$$R^3 = R \cdot R \cdot R$$

$$H = H$$

$$V = H \cdot R^2 \quad (\text{on prend } R^2 \text{ dans la colonne verticale et } H \text{ dans la colonne horizontale})$$

$$D = H \cdot R$$

$$D' = H \cdot R^3$$

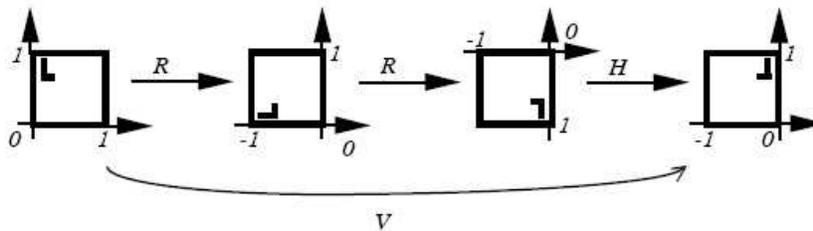
En termes de matrices, on a :

$$R = \begin{pmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^2 = R \cdot R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

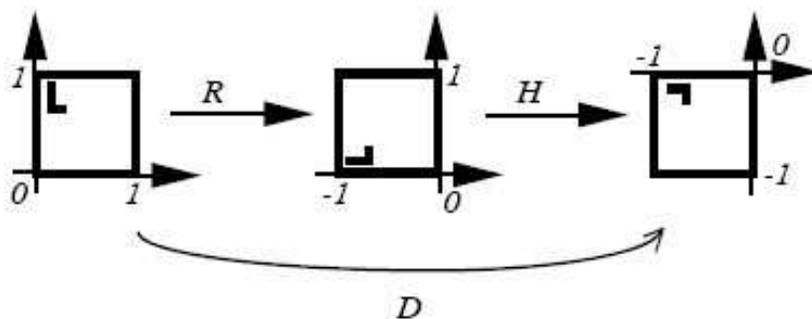
$$R^3 = R^2 \cdot R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Exemples A.2.5.**

a) Puisque  $V = H \cdot R^2$ , on peut décomposer  $V$  comme suit :



b)  $D = H \cdot R$



$$D = H \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

### Remarques.

1. Les symétries du carré, les rotations d'angle quelconque et leurs compositions sont des *isométries*, c'est-à-dire préservent les longueurs. Si  $w$  est une telle transformation, on a

$$\|w(P) - w(Q)\| = \|P - Q\| \quad \forall P \quad \text{et} \quad \forall Q \in \mathbb{R}^2.$$

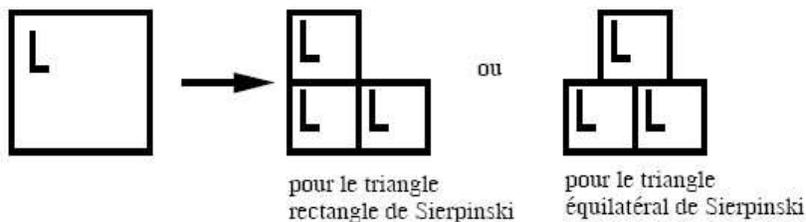
C'est aussi le cas si elles sont suivies d'une translation.

2. En composant une contraction uniforme (cf. A.2.1) avec une rotation, ou une symétrie du carré ou des compositions de celles-ci, on obtient, n'étant limité que par notre imagination, des transformations qui sont des contractions (au sens large : cf. section 1.2) et ceci qu'il y ait ou non translation.

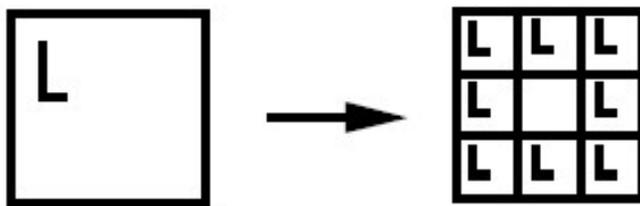
### Exemples A.2.6.

#### a) Triangle de Sierpinski

On l'obtient avec un SIF composé de trois homothéties de facteur  $\frac{1}{2}$  suivies de translations.

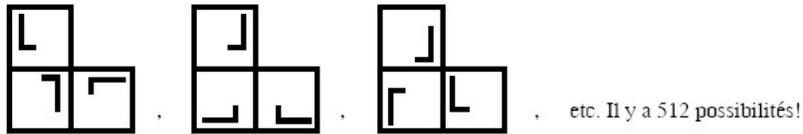


#### b) Tapis de Sierpinski (8 contractions de facteur $\frac{1}{3}$ + translations)

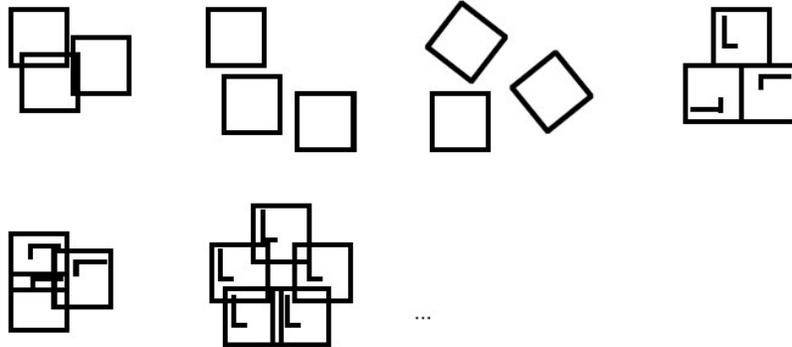


### A.2.3 Activités

#### 1. Variantes du triangle de Sierpinski



#### 2. Quelques suggestions



### A.2.4 Exercices

1. Montrer qu'une contraction uniforme commute avec n'importe quelle application linéaire. En d'autres mots, lorsqu'on compose une contraction uniforme avec des applications linéaires, on peut faire la contraction à n'importe quelle étape de la composition.
2. Montrer qu'en général deux applications linéaires ne commutent pas. Vérifier le, par exemple, avec des symétries du carré.
3. Montrer que toutes les transformations définies dans cette section sont des similitudes.

### A.3 Contraction non uniforme et cisaillement

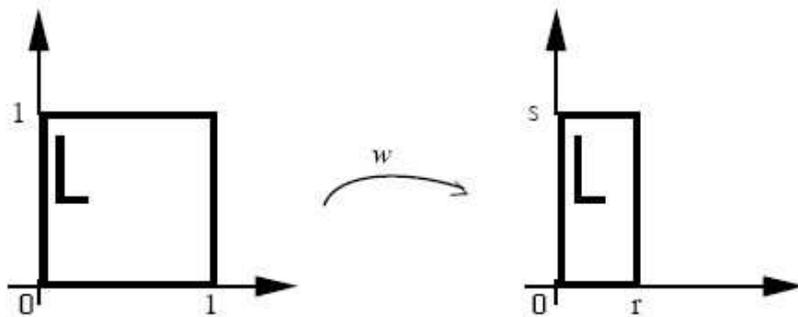
Dans cette section, nous présentons les applications linéaires inversibles qui ne sont pas des similitudes du plan.

#### A.3.1 Contraction non uniforme

**Définition A.3.1.** Une *contraction non uniforme* est une application linéaire de la forme

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où  $0 < r < 1$  et  $0 < s < 1$ .

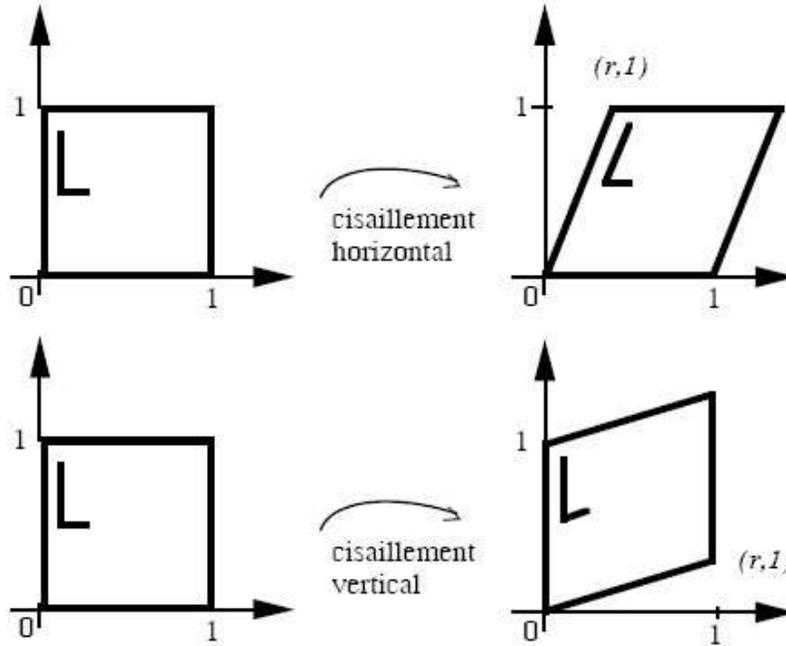


**Remarque.** On pourrait aussi définir, de façon analogue, une dilatation non uniforme ou une transformation qui dilate verticalement et contracte horizontalement (ou vice-versa).

### A.3.2 Cisaillement

**Définition A.3.2.** Un *cisaillement horizontal* (respectivement *vertical*) est une application linéaire de la forme

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \left( \text{resp. } w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \text{ où } r > 0$$



## A.4 Anatomie des similitudes du plan

Nous avons vu à l'exercice 3 de la sous-section A.2.4 que les homothéties, rotations et réflexions sont des similitudes. Il est clair qu'il en est de même pour les translations. Comme nous le verrons dans la proposition A.4.1 qui suit, une composition de telles transformations est une similitude. Dans cette section, nous montrerons que la réciproque est également vraie, caractérisant ainsi complètement les similitudes du plan.

**Proposition A.4.1.** *Toute composition de similitudes du plan est une similitude.*

*Démonstration.*

a) Montrons d'abord le résultat pour la composition de deux similitudes.

Soient  $w_1$  et  $w_2$  deux similitudes de rapport  $k_1$  et  $k_2$  respectivement, c'est-à-dire

$$\|w_1(P) - w_1(Q)\| = k_1\|P - Q\|, \|w_2(U) - w_2(V)\| = k_2\|U - V\| \quad \forall P, \forall Q, \forall U \quad \text{et} \quad \forall V \in \mathbb{R}^2.$$

On a alors pour tout  $Q \in \mathbb{R}^2$  et tout  $P \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|w_2 \circ w_1(P) - w_2 \circ w_1(Q)\| &= \|w_2(w_1(P)) - w_2(w_1(Q))\| \\ &= k_2\|w_1(P) - w_1(Q)\| \\ &= k_1k_2\|P - Q\| \end{aligned}$$

et donc  $w_2 \circ w_1$  est une similitude

b) Montrons maintenant le résultat pour la composition d'un nombre quelconque de similitudes. Soient  $w_1, w_2, \dots, w_n$  des similitudes. D'après la partie a),  $w_2 \circ w_1$  est une similitude. De même,  $w_3 \circ (w_2 \circ w_1) = w_3 \circ w_2 \circ w_1$  est une similitude et ainsi de suite... □

**Proposition A.4.2.** *Soit la transformation affine  $w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ . Alors  $w$  est une similitude si et seulement si sa partie linéaire est une similitude.*

*Démonstration.* La partie linéaire de  $w$  est l'application  $w_1$  définie par  $w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

Soit  $T$  la translation  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$  et  $T^{-1}$  son inverse, c'est-à-dire

$T^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e \\ -f \end{pmatrix}$ . On a  $w_1 = T^{-1} \circ w$  et  $w = T \circ w_1$ . Le résultat est alors une conséquence de la proposition A.4.1. □

Avant d'énoncer et de démontrer le résultat principal de cette section nous démontrerons les deux lemmes qui suivent.

**Lemme A.4.3.** *Soit  $w$  une application linéaire. Alors  $w$  est une similitude de rapport  $k$  si et seulement si  $\|w(U)\| = k$ ,  $\forall U \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\|U\| = 1$ .*

*Démonstration.*

(i) Supposons que  $w$  est une similitude de rapport  $k$ , c'est-à-dire

$$\|w(P) - w(Q)\| = k\|P - Q\|, \quad \forall P \text{ et } \forall Q \in \mathbb{R}^2.$$

Soit  $U \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\|U\| = 1$ .

On a alors  $\|w(U)\| = \|w(U) - w((0,0))\|$  car  $w$  étant linéaire,  $w((0,0)) = (0,0)$ , d'où

$$\|w(U)\| = k\|U - (0,0)\| = k\|U\| = k \quad \text{car } \|U\| = 1.$$

(ii) Supposons

$$\|w(U)\| = k, \quad \forall U \in \mathbb{R}^2 \text{ tel } \|U\| = 1.$$

Soient  $P$  et  $Q \in \mathbb{R}^2$ .

Si  $P = Q$ , on a  $\|w(P) - w(Q)\| = 0 = k\|P - Q\|$ .

Nous supposons donc que  $P \neq Q$ . Alors  $V = \frac{P - Q}{\|P - Q\|}$  vérifie  $\|V\| = 1$ , d'où

$$\|w(V)\| = k \text{ et donc } \left\| w \left( \frac{P - Q}{\|P - Q\|} \right) \right\| = k.$$

Mais

$$w \left( \frac{P - Q}{\|P - Q\|} \right) = \frac{1}{\|P - Q\|} w(P - Q) = \frac{1}{\|P - Q\|} [w(P) - w(Q)]$$

car  $w$  est linéaire. Ainsi

$$\left\| w \left( \frac{P - Q}{\|P - Q\|} \right) \right\| = \left\| \frac{1}{\|P - Q\|} [w(P) - w(Q)] \right\| = \frac{1}{\|P - Q\|} \|w(P) - w(Q)\|$$

et donc

$$\|w(P) - w(Q)\| = k\|P - Q\|.$$

□

**Lemme A.4.4.** *Soit  $w$  une application linéaire qui est une similitude. Alors si  $P$  et  $Q$  sont orthogonaux (c'est-à-dire  $(P|Q) = 0$  où  $(|)$  est le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^2$ ),  $w(P)$  et  $w(Q)$  sont orthogonaux.*

*Démonstration.* Soit  $k$  le rapport de similitudes et soient  $P$  et  $Q \in \mathbb{R}^2$  orthogonaux.

On a  $\|w(P) - w(Q)\| = k\|P - Q\|$ , d'où

$$(*) \quad \|w(P) - w(Q)\|^2 = k^2\|P - Q\|^2.$$

Mais

$$\begin{aligned}\|w(P) - w(Q)\|^2 &= (w(P) - w(Q) \mid w(P) - w(Q)) \\ &= (w(P) \mid w(P)) - 2(w(P) \mid w(Q)) + (w(Q) \mid w(Q)) \\ &= \|w(P)\|^2 - 2(w(P) \mid w(Q)) + \|w(Q)\|^2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|P - Q\|^2 &= (P - Q \mid P - Q) = (P \mid P) - 2(P \mid Q) + (Q \mid Q) \\ &= \|P\|^2 + \|Q\|^2\end{aligned}$$

car  $P$  et  $Q$  sont orthogonaux.

On en déduit alors de (\*) que

$$(**) \quad \|w(P)\|^2 - 2(w(P) \mid w(Q)) + \|w(Q)\|^2 = k^2[\|P\|^2 + \|Q\|^2].$$

Mais  $w$  étant une similitude de rapport  $k$ , on obtient

$$\|w(P)\| = \|w(P) - w((0,0))\| = k\|P - (0,0)\| = k\|P\|$$

et, de même

$$\|w(Q)\| = k\|Q\|.$$

En reportant dans (\*\*), on a

$$k^2\|P\|^2 - 2(w(P) \mid w(Q)) + k^2\|Q\|^2 = k^2[\|P\|^2 + \|Q\|^2],$$

d'où

$$2(w(P) \mid w(Q)) = 0$$

et donc  $(w(P) \mid w(Q)) = 0$ , c'est-à-dire  $w(P)$  et  $w(Q)$  sont orthogonaux, ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat fondamental qui suit.

**Théorème A.4.5.** *Soit  $w$  une application affine du plan. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

- (i)  *$w$  est une similitude*
- (ii)  *$w$  est une composition de transformations parmi les types suivants : homothétie, rotation, réflexion et translation.*

*Démonstration.* Nous avons déjà établi que (ii)  $\implies$  (i). Il reste à montrer que (i)  $\implies$  (ii). Supposons donc que  $w$  est une similitude. D'après la proposition 6.2, nous pouvons supposer que  $w$  est linéaire.

Soit  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  la matrice de  $w$  dans la base standard  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  où  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .  
On a donc  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = w(\mathbf{e}_1)$  et  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = w(\mathbf{e}_2)$ .

Soit  $k$  le rapport de similitude. Puisque

$$\|\mathbf{e}_1\| = 1 \quad \text{et} \quad \|\mathbf{e}_2\| = 1,$$

il s'ensuit du lemme 6.3 que

$$\|w(\mathbf{e}_1)\| = k \quad \text{et} \quad \|w(\mathbf{e}_2)\| = k.$$

En particulier, puisque  $\|w(\mathbf{e}_1)\| = k$ , il existe  $\theta \in [0, 2\pi]$  tel que  $w(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} k \cos \theta \\ k \sin \theta \end{pmatrix}$ . Mais ayant  $\mathbf{e}_1$  orthogonal à  $\mathbf{e}_2$ , on déduit du lemme 6.4 que  $w(\mathbf{e}_1)$  et  $w(\mathbf{e}_2)$  sont orthogonaux et puisqu'on a également  $\|w(\mathbf{e}_2)\| = k$ , on a

$$w(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -k \sin \theta \\ k \cos \theta \end{pmatrix}$$

ou

$$w(\mathbf{e}_2) = -\begin{pmatrix} -k \sin \theta \\ k \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \sin \theta \\ -k \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La matrice de  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de  $w$  est donc

$$\begin{pmatrix} k \cos \theta & -k \sin \theta \\ k \sin \theta & k \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} k \cos \theta & k \sin \theta \\ k \sin \theta & -k \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Dans le premier cas, on a

$$\begin{pmatrix} k \cos \theta & -k \sin \theta \\ k \sin \theta & k \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire la composition d'une rotation et d'une homothétie.

Pour le deuxième cas, on a

$$\begin{pmatrix} k \cos \theta & k \sin \theta \\ k \sin \theta & -k \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire la composition d'une réflexion, d'une rotation et d'une homothétie.

□

## A.5 Méthode du “bulldozer” pour déterminer une transformation affine

Une transformation affine du plan est entièrement déterminée par l'image de trois points. Soient  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$  et  $P_3 = (x_3, y_3)$  trois points du domaine et  $Q_1 = (u_1, v_1)$ ,  $Q_2 = (u_2, v_2)$  et  $Q_3 = (u_3, v_3)$  trois points de l'ensemble d'arrivée. Alors il existe une et une seule transformation affine

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

telle que  $w(P_1) = Q_1$ ,  $w(P_2) = Q_2$  et  $w(P_3) = Q_3$ . Les coefficients de  $w$  sont les solutions du système de six équations linéaires :

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + e &= u_1 \\ ax_2 + by_2 + e &= u_2 \\ ax_3 + by_3 + e &= u_3 \\ cx_1 + dy_1 + f &= v_1 \\ cx_2 + dy_2 + f &= v_2 \\ cx_3 + dy_3 + f &= v_3 \end{aligned}$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle

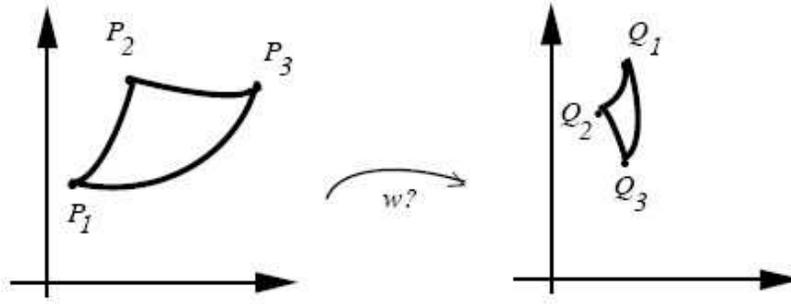
$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & y_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x_2 & y_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x_3 & y_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

que l'on peut découpler en deux systèmes :

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Bien entendu, il faut aussi supposer que les points  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  ne sont pas alignés.

On pourrait, par exemple, utiliser cette méthode dans la situation illustrée ci-dessous.



Pour résoudre ce type de système, on peut utiliser Maple.



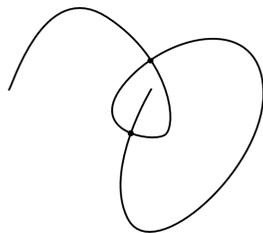
# Chapitre 2

## Formes irrégulières : dimension fractale

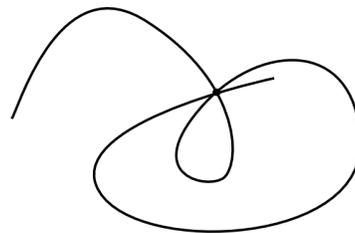
### 2.1 Les courbes

#### 2.1.1 Longueur d'une courbe

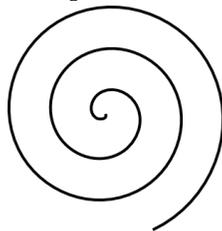
Nous nous limitons ici aux courbes simples dans le plan (ou l'espace), c'est-à-dire sans point multiple.



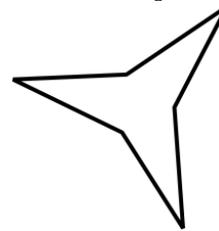
Courbe avec deux points doubles



Courbe avec un point triple



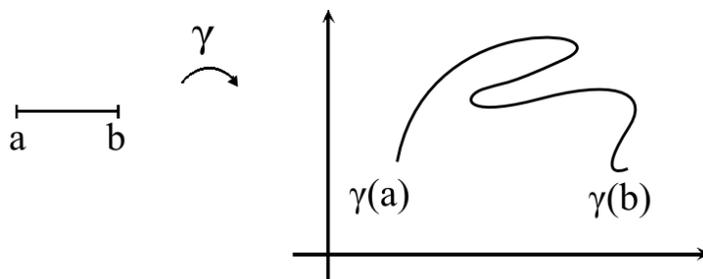
Courbe simple



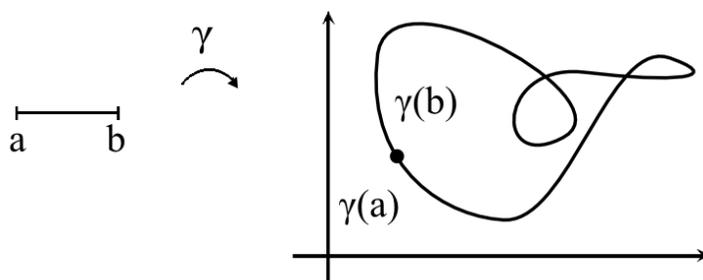
Courbe simple fermée

Rendons cette notion un peu plus rigoureuse.

**Définition 2.1.1.** Une *courbe* (bornée)  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}^3$ ) est l'image dans  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}^3$ ) d'un intervalle  $[a, b]$  par une application continue  $\gamma$ .

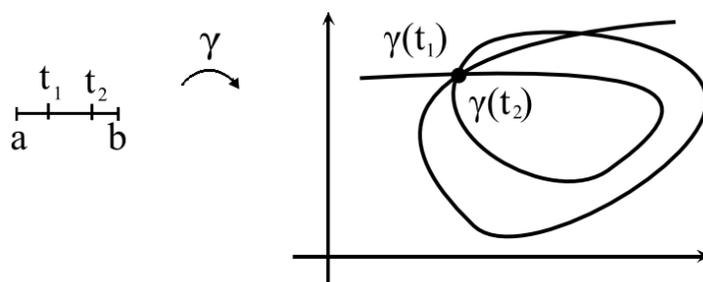


$\gamma$  est appelée une *paramétrisation* de la courbe  $\Gamma$ . Si  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , on dit que la courbe est *fermée*.



#### Courbe fermée

**Définition 2.1.2.** Un point  $P$  d'une courbe  $\Gamma$  est dit *multiple* s'il existe au moins deux  $t_1$  et  $t_2$  tels que  $a < t_1 < t_2 < b$  et  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) = P$ .



#### Point multiple

**Définition 2.1.3.** Un point multiple  $P \in \Gamma$  est dit *double* s'il existe exactement deux valeurs  $t_1$  et  $t_2$  telles que  $a < t_1 < t_2 < b$  et  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) = P$ . Il est dit *triple* s'il existe  $t_1, t_2$  et  $t_3$  tels que  $a < t_1 < t_2 < t_3 < b$  et  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) = \gamma(t_3) = P$ . De façon analogue, on définit les points *quadruples*, etc.

**Définition 2.1.4.** Une courbe  $\Gamma$  est dite *simple* si elle n'a pas de point multiple. Dans ce cas, la paramétrisation

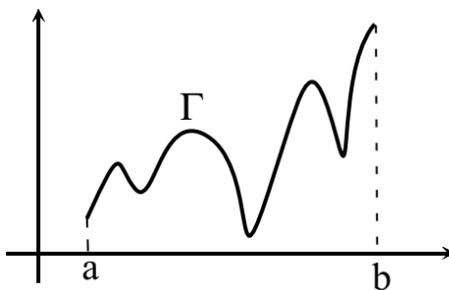
$$\Gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

est bijective sur l'intervalle ouvert  $]a, b[$  si la courbe est fermée (sur tout l'intervalle  $[a, b]$  si la courbe n'est pas fermée).

Le graphe d'une fonction continue

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une courbe simple :



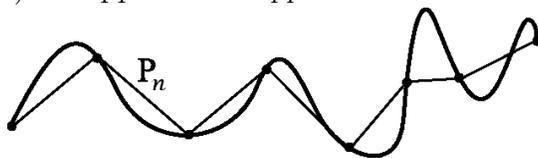
Le graphe  $\Gamma = \{(t, f(t)) | t \in [a, b]\}$  de  $f$  a comme paramétrisation

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, f(t)) \end{aligned}$$

Soit  $\Gamma$  une courbe simple paramétrisée par  $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$  et soit  $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  une partition de  $[a, b]$ , c'est-à-dire

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

**Définition 2.1.5.** La courbe  $P_n$  formée par les segments de droites joignant les points  $\gamma(t_i)$  et  $\gamma(t_{i+1})$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) est appelée une *approximation linéaire par morceaux* de  $\Gamma$ .



On a le résultat d'approximation suivant :

**Proposition 2.1.6.** *Si on a une suite  $\{P_n\}$  d'approximations linéaires par morceaux de  $\Gamma$  telle que la longueur maximale des segments de droites tend vers 0, alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(P_n, \Gamma) = 0$  (où  $h$  est la distance de Hausdorff).*

**Définition 2.1.7.** Soit  $\Gamma$  une courbe simple et soit  $\{P_n\}$  une suite d'approximations linéaires par morceaux de  $\Gamma$  telle que la longueur maximale des segments de droite formant les  $P_n$  tend vers 0. La *longueur* de  $\Gamma$  est définie par

$$\ell(\Gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(P_n).$$

où  $\ell(P_n)$  est la longueur de  $P_n$ .

**Remarque.** Il n'est pas évident a priori que cette définition a un sens. Pour cela, il faudrait montrer que quelle que soit la suite d'approximations linéaires par morceaux de  $\Gamma$ , la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell(P_n)$  existe et cette limite ne dépend pas de la suite d'approximations choisies. On trouvera cette démonstration dans l'excellent livre de C. Tricot : *Curves and Fractal Dimension*, Springer-Verlag, 1995.

La présente section s'inspire fortement de ce livre.

## 2.1.2 Courbes différentiables

**Définition 2.1.8.** On dit qu'une courbe  $\Gamma$  de paramétrisation  $\gamma$  est *différentiable* si  $\gamma$  est une fonction différentiable. Dans ce cas, on peut montrer que

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

**Notation.**

Si

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)) \quad \text{et} \\ |\gamma'(t)| &= \sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2}. \end{aligned}$$

En particulier, si  $\gamma'$  est continue sur  $[a, b]$ ,  $\ell(\Gamma) < \infty$ , c'est-à-dire  $\Gamma$  est de longueur finie.

**Exemples 2.1.9.**

a) Cercle de rayon  $R$ . Une paramétrisation est donnée par

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (R \cos t, R \sin t)\end{aligned}$$

d'où

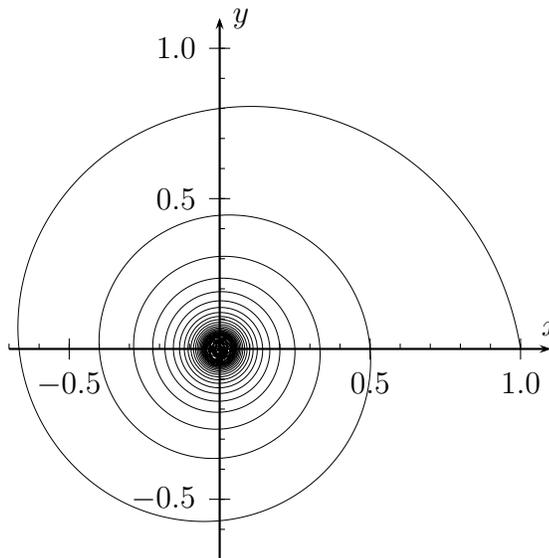
$$\begin{aligned}\ell(\Gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2} dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.\end{aligned}$$

b) Considérons la spirale définie en coordonnées polaires par

$$\begin{cases} r(t) = t \\ \theta(t) = 2\pi/t \end{cases} \text{ pour } 0 < t \leq 1.$$

On a donc en coordonnées cartésiennes  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  où

$$\begin{cases} x(t) = t \cos 2\pi/t \\ y(t) = t \sin 2\pi/t \end{cases} \quad 0 < t \leq 1.$$



**Remarque.** La zone sombre au centre de la figure est due au fait que lorsque  $t$  tend vers 0, la spirale est très dense au voisinage de l'origine.

On peut prolonger de façon continue  $\gamma$  à l'intervalle  $[0, 1]$  en posant  $\gamma(0) = (0, 0)$ , c'est-à-dire

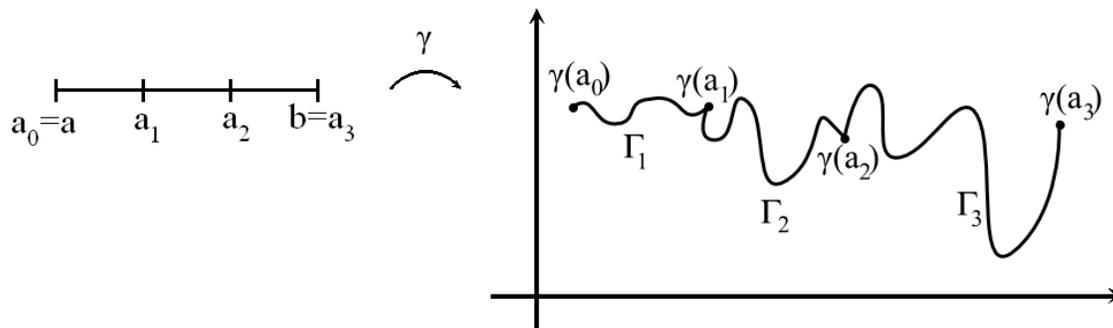
$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (t \cos 2\pi/t, t \sin 2\pi/t) \quad \text{pour } 0 < t \leq 1 \\ \text{et } \gamma(0) &= (0, 0)\end{aligned}$$

**Note :**  $\gamma$  est bien continue en  $t = 0$  car  $\lim_{t \rightarrow 0} t \cos 2\pi/t = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} t \sin 2\pi/t = 0$ .

### 2.1.3 Courbes de longueur finie

On a vu que les courbes  $\Gamma$  de classe  $C^1$  (c'est-à-dire dont la paramétrisation  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est de classe  $C^1$ , c'est-à-dire différentiable et  $\gamma'$  continue sur  $[a, b]$ ) sont de longueur finie. Plus généralement, une courbe  $\Gamma$  de classe  $C^1$  par morceaux est de longueur finie.

**Définition 2.1.10.** Une courbe  $\Gamma$  de paramétrisation  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est dite  $C^1$  par morceaux si on peut décomposer  $[a, b]$  en sous-intervalles  $[a_i, a_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, p-1$  où  $a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_p = b$  tels que la restriction de  $\gamma$  à chaque sous-intervalle soit de classe  $C^1$ .



Courbe  $C^1$  par morceaux

Ainsi,  $\Gamma$  se décompose en  $p$  morceaux  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$  (où la paramétrisation de  $\Gamma_i$  est la restriction à  $[a_{i-1}, a_i]$  de  $\gamma$ ) et on a

$$\ell(\Gamma) = \sum_{i=1}^p \ell(\Gamma_i).$$

Le résultat qui suit montre qu'une courbe de longueur finie doit être «assez régulière» :

Si  $\Gamma$  est une courbe de longueur finie, alors  $\Gamma$  est différentiable «presque partout», c'est-à-dire si  $S$  est l'ensemble des  $t \in [a, b]$  pour lesquels  $\gamma'(t)$  n'existe pas, on a que la longueur de  $S$  (longueur usuelle dans  $\mathbb{R}$ ) est nulle.

**Remarque.** On peut avoir des courbes différentiables presque partout qui sont de longueur infinie, e.g. la spirale du dernier exemple.

Du résultat précédent et du dernier exemple (la spirale), il se dégage que pour avoir une courbe «fractale»  $\Gamma$ , en particulier «irrégulière à toutes les échelles», nous demanderons que toute portion de  $\Gamma$  soit de longueur infinie (une telle courbe est la courbe de von Koch).

Dans le prochain paragraphe, nous nous intéresserons aux courbes de longueur infinie (une première condition essentielle pour avoir une courbe fractale), mais avant, voyons deux autres méthodes pour obtenir la longueur d'une courbe.

### 2.1.4 Longueur obtenue avec le compas

C'est une méthode particulière d'obtenir une approximation linéaire par morceaux d'une courbe. Considérons une courbe  $\Gamma$  dont les extrémités sont  $A$  et  $B$ . Avec un compas d'ouverture  $\varepsilon$ , on obtient les points  $A_1 = A, A_2, A_3, \dots, A_N$  comme sur la figure.



Soit  $P_\varepsilon$  l'approximation linéaire par morceaux passant par les points  $A_1, A_2, \dots, A_N, B$  et désignons par  $N(\varepsilon)$  le nombre  $N$ , c'est-à-dire  $P_\varepsilon$  est constitué de  $N(\varepsilon) - 1$  segments de longueur  $\varepsilon$  et d'un segment ( $[A_N, B]$ ) de longueur  $\leq \varepsilon$ . Ainsi,

$$\varepsilon(N(\varepsilon) - 1) \leq \ell(P_\varepsilon) \leq \varepsilon N(\varepsilon)$$

et par définition de la longueur  $\ell(\Gamma)$  de  $\Gamma$ , on a

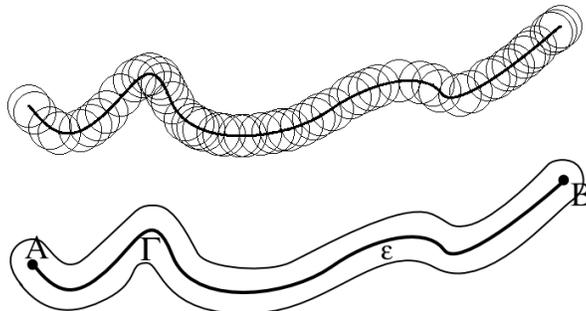
$$\begin{aligned} \ell(\Gamma) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \ell(\Gamma_\varepsilon) \quad \text{d'où} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon(N(\varepsilon) - 1) &\leq \ell(\Gamma) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon N(\varepsilon) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon N(\varepsilon) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon &\leq \ell(\Gamma) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon N(\varepsilon) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon N(\varepsilon) &\leq \ell(\Gamma) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon N(\varepsilon) \quad \text{et donc} \\ \ell(\Gamma) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon N(\varepsilon). \end{aligned}$$

### 2.1.5 Longueur obtenue à partir de l'aire de $\varepsilon$ -voisinages

Soient  $\Gamma$  une courbe et  $\varepsilon > 0$ . Le  $\varepsilon$ -voisinage de  $\Gamma$  noté  $\Gamma_\varepsilon$  (auss appelé  $\varepsilon$ -saucisse de Minkowski) est  $\Gamma_\varepsilon = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d_2(P, \Gamma) \leq \varepsilon\}$ . En fait, on a :

Désignons par  $D(x, \varepsilon)$  le disque fermé de rayon  $\varepsilon$  centré au point  $x$ . On a alors

$$\begin{aligned}\Gamma_\varepsilon &= \text{réunion des disques } D(x, \varepsilon) \text{ où } x \text{ parcourt la courbe } \Gamma \\ &= \cup_{x \in \Gamma} D(x, \varepsilon).\end{aligned}$$

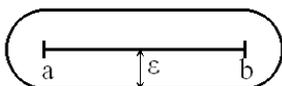


Désignons par  $A(\Gamma_\varepsilon)$  l'aire de  $\Gamma_\varepsilon$ . On peut montrer que

$$\ell(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(\Gamma_\varepsilon)}{2\varepsilon}$$

### Exemples 2.1.11.

a) Considérons le segment  $\Gamma = [a, b]$ .



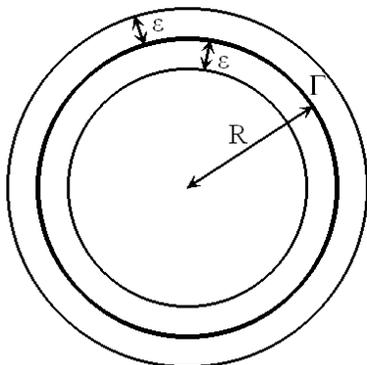
$\Gamma_\varepsilon$  est constitué de deux demi-disques de rayon  $\varepsilon$  et d'une bande de longueur  $(b - a)$  et de largeur  $2\varepsilon$ . Ainsi,

$$A(\Gamma_\varepsilon) = \frac{\pi\varepsilon^2}{2} + (b - a)2\varepsilon + \frac{\pi\varepsilon^2}{2}$$

d'où

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(\Gamma_\varepsilon)}{2\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi\varepsilon^2}{2\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(b - a)2\varepsilon}{2\varepsilon} \\ &= b - a = \ell(\Gamma).\end{aligned}$$

b) Considérons un cercle de rayon  $R$ .



$\Gamma_\varepsilon$  est l'anneau compris entre les cercles de rayons  $R - \varepsilon$  et  $R + \varepsilon$ . Ainsi,

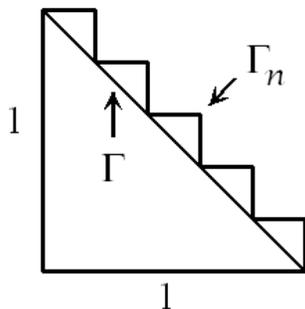
$$\begin{aligned}A(\Gamma_\varepsilon) &= \pi(R + \varepsilon)^2 - \pi(R - \varepsilon)^2 \\ &= \pi 4\varepsilon R\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(\Gamma_\varepsilon)}{2\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4\pi\varepsilon R}{2\varepsilon} \\ &= 2\pi R = \ell(\Gamma).\end{aligned}$$

**Remarque.** Avant de clore ce paragraphe, faisons la remarque suivante : Soit  $\Gamma$  une courbe et soit  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de courbes convergeant vers  $\Gamma$ , c'est-à-dire  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(\Gamma_n, \Gamma) = 0$ , on serait tenté de croire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell(\Gamma_n) = \ell(\Gamma)$ .

Mais ne cédon pas à la tentation, car c'est faux, comme le montre l'exemple suivant :

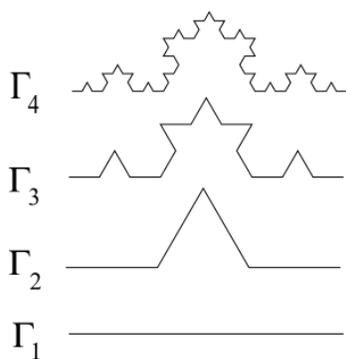


Soit  $\Gamma$  l'hypoténuse du triangle rectangle isocèle de côtés de longueur 1, 1 et  $\sqrt{2}$ . Désignons par  $\Gamma_n$  la courbe polygonale obtenue, comme sur la figure, en prenant des segments verticaux et horizontaux de longueur  $\frac{1}{n}$ . Il est clair que, d'une part,  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(\Gamma_n, \Gamma) = 0$  et que, d'autre part,  $\ell(\Gamma_n) = 2 \quad \forall n$ . Ainsi,

$$\ell(\Gamma) = \sqrt{2} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(\Gamma_n) = 2$$

## 2.1.6 Courbes de longueur infinie et loi de puissance

### Courbe de von Koch



La courbe de von Koch  $\Gamma$  est par construction  $\Gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n$  où les  $\Gamma_n$  sont construits en procédant itérativement, comme l'illustre la figure pour la construction de  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  et  $\Gamma_4$ .

**Note :** On peut montrer que la suite de courbes  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy pour la distance de Hausdorff. Puisque les  $\Gamma_n$  sont des compacts, on déduit alors qu'il existe un unique compact  $\Gamma$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(\Gamma_n, \Gamma) = 0$ .

Les courbes  $\Gamma_n$  forment une suite d'approximations linéaires par morceaux de  $\Gamma$ . En particulier, on aura

$$\ell(\Gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(\Gamma_n).$$

D'autre part,

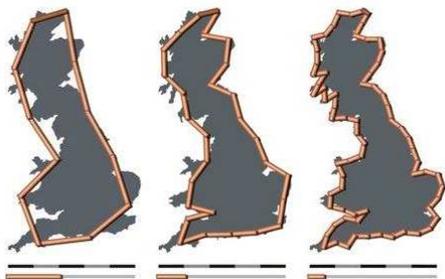
$$\begin{aligned}\ell(\Gamma_1) &= \frac{4}{3} \quad \left( 4 \text{ segments de longueur } \frac{1}{3} \right) \\ \ell(\Gamma_2) &= \left( \frac{4}{3} \right)^2 \left( 16 = 4^2 \text{ segments de longueur } = \left( \frac{1}{3} \right)^2 \right) \\ &\dots \\ \ell(\Gamma_n) &= \left( \frac{4}{3} \right)^n.\end{aligned}$$

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell(\Gamma_n) = \infty$ , c'est-à-dire  $\ell(\Gamma) = \infty$ .

On peut aussi voir  $\Gamma_n$  comme l'approximation linéaire par morceaux obtenue par la méthode du compas lorsque l'ouverture du compas est  $\varepsilon_n = \frac{1}{3^n}$ . Le nombre de pas pour franchir la courbe est donc, dans ce cas,  $N(\varepsilon_n) = 4^n$ , d'où

$$\ell(P_{\varepsilon_n}) = \varepsilon_n N(\varepsilon_n) = \left( \frac{4}{3} \right)^n.$$

### Côte de la Grande-Bretagne



Source : Wikipédia

Quelle est la longueur de la côte de Grande-Bretagne ?

En s'appuyant sur des travaux de L. Richardson, Benoît Mandelbrot (Science 155, pp. 636-638 (1967)) s'est intéressé à ce problème qui a joué un rôle important à l'origine des travaux de Mandelbrot sur la géométrie fractale.

À partir de cartes géographiques, on obtient, à l'aide du compas, le tableau suivant.

On obtient (ce qui n'est pas surprenant) des longueurs différentes selon l'ouverture du compas utilisée. S'est-on entendu sur une «ouverture de compas» standard ? Il semble que non :

- L'Encyclopédie Americana (N.Y. 1958) donne 7 440 km
- L'Encyclopédie Collier (Londres 1986) donne : légèrement sous 8 000 km
- Autre problème analogue : Quelle est la longueur de la frontière Espagne-Portugal ?
- L'Encyclopédie Portugaise : 758 milles
- Encyclopédie Espagnole : 616 milles

Ouverture du compas (en km)	Longueur (en km)
500	2 600
100	3 800
54	4 770
17	8 640

TABLE 2.1 – Différentes longueurs de la côte de la Grande-Bretagne

### Loi de puissance

Il se dégage de ces mesures à l'aide du compas que  $\ell(P_\varepsilon) \rightarrow \infty$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $P_\varepsilon$  est l'approximation linéaire par morceaux obtenue par la méthode du compas lorsque l'ouverture de celui-ci est  $\varepsilon$ ). Cependant, en regardant différents pays et différentes îles, il apparaît que certaines frontières sont plus régulières que d'autres (e.g. les frontières de certains états américains, la frontière de la Saskatchewan), on s'intéresse donc à caractériser ce type de courbes par des mesures autres que la longueur. Nous obtiendrons ce type de caractérisation à l'aide de loi de puissance.

Pour les exemples précédents (courbe de von Koch et côte de la Grande-Bretagne), on a

$$\ell(P_\varepsilon) \rightarrow \infty \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0$$

c'est-à-dire  $\varepsilon N(\varepsilon) \rightarrow \infty$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  (où  $N(\varepsilon)$  est le nombre de pas nécessaire avec une ouverture de compas  $\varepsilon$  pour parcourir la courbe).

Cette dernière observation signifie que  $N(\varepsilon) \rightarrow \infty$  plus vite que  $\varepsilon \rightarrow 0$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Puisque  $\varepsilon = \varepsilon^1$  ne tend pas assez vite vers 0 lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on peut espérer qu'en multipliant  $\varepsilon N(\varepsilon)$  par une certaine puissance  $\varepsilon^d$  de  $\varepsilon$ , on aura

$$\varepsilon^d \varepsilon N(\varepsilon) = \varepsilon^d \ell(P_\varepsilon) \rightarrow \text{cte} \neq 0$$

lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Il est clair qu'on aura, généralement,  $\varepsilon^d \ell(P_\varepsilon) \rightarrow 0$  si  $d$  est grand et qu'on a  $\varepsilon^0 \ell(P_\varepsilon) = \ell(P_\varepsilon) \rightarrow \infty$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . On peut donc espérer qu'il existe un  $d^*$  du «juste milieu», c'est-à-dire tel que

$$\varepsilon^{d^*} \ell(P_\varepsilon) \rightarrow \text{cte} \neq 0.$$

Si un tel  $d^*$  existe, on aura

$$\begin{aligned} d^* &= \inf\{d \geq 0 \mid \varepsilon^d \ell(P_\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0\} \\ &= \sup\{d \geq 0 \mid \varepsilon^d \ell(P_\varepsilon) \rightarrow \infty \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0\} \end{aligned}$$

mais surtout, du point de vue pratique, si on a

$$\varepsilon^{d^*} \ell(P_\varepsilon) \simeq C \quad \text{où } C = \text{cte} \neq 0,$$

on aura

$$\ell(P_\varepsilon) \simeq C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d^*} \quad \text{c'est-à-dire} \quad (2.1)$$

$$\log \ell(P_\varepsilon) \simeq d^* \log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + c \quad (\text{où } c = \log C). \quad (2.2)$$

Ainsi, si on fait le graphe de  $\log \ell(P_\varepsilon)$  en fonction de  $\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ , on obtiendra une droite de pente  $d^*$ .

La relation (2.1) est ce que l'on appelle une *loi de puissance*.

Remarquons que (2.1) peut aussi s'écrire

$$\varepsilon N(\varepsilon) \simeq C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d^*} \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$N(\varepsilon) \simeq C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1+d^*} \quad \text{ou encore} \quad (2.3)$$

$$\log N(\varepsilon) \simeq (1 + d^*) \log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + c \quad (c = \log C) \quad (2.4)$$

### Exemples 2.1.12.

#### a) Courbe de von Koch

Prenons  $\varepsilon_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k$ . Alors on obtient  $N(\varepsilon_k) = 4^k$  d'où  $\log N(\varepsilon_k) = k \log 4$  et  $\log \frac{1}{\varepsilon_k} = k \log 3$ . Ainsi, on déduit que

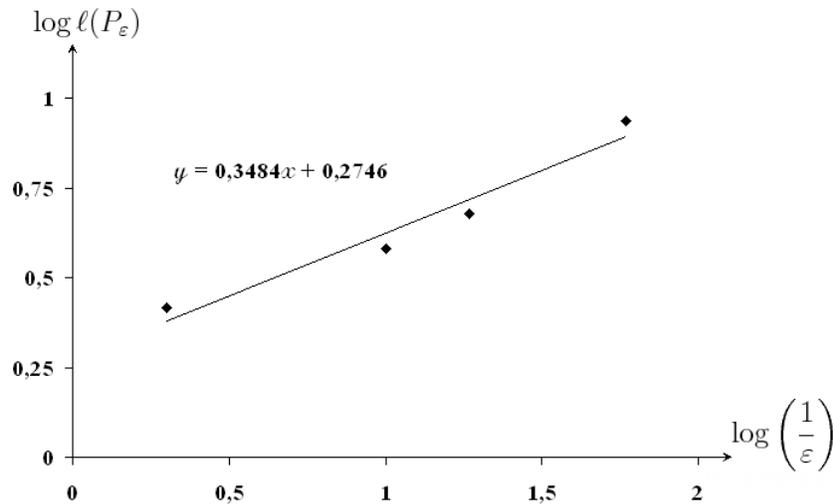
$$\log N(\varepsilon_k) = \left(\frac{\log 4}{\log 3}\right) \log \left(\frac{1}{\varepsilon_k}\right)$$

et donc, on a une relation de la forme (2.4) en prenant  $1 + d^* = \frac{\log 4}{\log 3}$ , c'est-à-dire avec  $d^* = \frac{\log 4}{\log 3} - 1 \simeq 0.2618$ .

**Remarque.**  $\frac{\log 4}{\log 3}$  est la dimension de similitude que nous noterons dorénavant  $D_s$ . Ainsi,  $D_s = 1 + d^*$  pour la courbe de von Koch, ce qui n'est l'effet du hasard comme nous le verrons plus loin.

## b) Côte de la Grande-Bretagne

Utilisons les données du tableau 2.1 et indiquons les points  $\left(\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \log \ell(P_\varepsilon)\right)$ .



$\ell(P_\varepsilon)$  et  $\varepsilon$  sont ici exprimés en unités de 1 000 km. (Ainsi, une ouverture  $\varepsilon$  de 100 km correspond à  $\varepsilon = 0.1$ .)

En cherchant la droite qui approxime bien les quatre points (en pratique, on prend la droite des moindres carrés), on obtient une droite de pente  $d^* \simeq 0.3$ . Ainsi, pour la longueur de la côte de la Grande-Bretagne, on a

$$\ell(P_\varepsilon) \simeq C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{0.3} \quad (2.5)$$

ou encore

$$\log N(\varepsilon) \simeq C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1.3} \quad (2.6)$$

- Pour la frontière Portugal-Espagne, on obtient  $d^* \simeq 0.25$ .
- Pour la côte de la Norvège :  $d^* \simeq 0.5$ .

## 2.1.7 Dimension-compas

Comme on l'a vu pour la courbe de von Koch, on a  $D_s = 1 + d^* = \frac{\log 4}{\log 3}$  où  $D_s$  est la dimension de similitude.

**Définition 2.1.13.** Nous définissons la *dimension-compas* d'une courbe comme étant

$$D_c = 1 + d^*.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} D_c &= 1.3 && \text{pour la côte de Grande-Bretagne} \\ D_c &= 1.25 && \text{pour la frontière Portugal-Espagne} \\ D_c &= 1.5 && \text{pour la côte de Norvège} \end{aligned}$$

En regardant de bonnes cartes géographiques des trois courbes précédentes, on voit que  $D_c$  mesure en quelque sorte l'irrégularité de la courbe.

### $D_s$ vs $D_c$

Montrons (comme on l'a observé pour la courbe de von Koch) que pour une courbe auto-similaire avec des similarités ayant le même facteur de contraction, on a  $D_s = D_c$ .

Soit  $\Gamma$  une courbe auto-similaire qui se décompose en parties  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$  telles que  $\Gamma_i = w_i(\Gamma)$ ,  $i = 1, \dots, N$  où les  $w_i$  sont des similitudes ayant le même facteur de contraction  $r$ . En particulier, si on utilise la méthode du compas avec une ouverture  $r$ , on obtiendra  $N(r)$ , le nombre de pas nécessaire pour traverser cette courbe, égal à  $N$ . D'autre part, d'après la définition de  $D_s$ , on a

$$\underbrace{r^{D_s} + r^{D_s} + \dots + r^{D_s}}_{N \text{ fois}} = 1$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} Nr^{D_s} &= 1 && \text{ou encore} \\ N &= \left(\frac{1}{r}\right)^{D_s}. \end{aligned}$$

Ayant  $N(r) = N$ , on obtient

$$N^k = \left(\left(\frac{1}{r}\right)^{D_s}\right)^k = \left(\frac{1}{r^k}\right)^{D_s} = N(r^k). \quad (2.7)$$

Admettons que  $D_c = 1 + d^*$  existe (on peut le montrer), alors

$$N(\varepsilon) \simeq C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{D_c} \quad \text{pour } \varepsilon \text{ petit.} \quad (2.8)$$

Posons  $\varepsilon_k = r^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), alors pour  $k$  assez grand,  $\varepsilon_k = r^k$  sera petit (car  $0 \leq r < 1$ ) et de (2.8), on déduit

$$N(r^k) = C \left(\frac{1}{r^k}\right)^{D_c}$$

et donc, en utilisant (2.7), on obtient

$$\left(\frac{1}{r^k}\right)^{D_s} = C \left(\frac{1}{r^k}\right)^{D_c} \quad \forall k \text{ assez grand,}$$

ce qui n'est possible que si  $D_s = D_c$ .

### 2.1.8 Exercices

1. Montrer que la spirale est de longueur infinie.

**Suggestion** :  $\Gamma \setminus \{0, 0\}$  est la réunion des  $\gamma_k$  où

$$\Gamma_k = \left\{ (\gamma, (t), \gamma_2(t_1)) \mid \frac{1}{k+1} \leq t \leq \frac{1}{k} \right\} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

et donc

$$\ell(\Gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(\Gamma_k).$$

## 2.2 Dimension fractale

### 2.2.1 Définition de la dimension fractale

Jusqu'à maintenant, nous avons défini des notions de dimension pour les ensembles auto-similaires (dimension de similitude) et les courbes (dimension-compas). Nous allons introduire une notion de dimension pour les compacts  $\subset \mathbb{R}^2$  (on procéderait de façon analogue pour les sous-ensembles compacts  $\subset \mathbb{R}^n$  ou même pour les sous-ensembles compacts d'un espace métrique).

**Définition 2.2.1.** Soit  $K$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^2$ . Désignons par  $N(\varepsilon, K)$  le nombre minimum de disques fermés de rayon  $\varepsilon$  nécessaire pour recouvrir  $K$ .

La *dimension fractale*, notée  $D_f$ , est définie par

$$D_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon, K)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (2.9)$$

si cette limite existe.



Recouvrement de  $K$  par des disques de rayon  $\varepsilon$

**Remarques.**

1. Ayant  $\log \frac{1}{\varepsilon} = \log 1 - \log \varepsilon = -\log \varepsilon$  et  $\log \varepsilon < 0$  pour  $\varepsilon < 1$

si la limite  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon, K)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$  existe, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon, K)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon, K)}{-\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon, K)}{|\log \varepsilon|}$$

2. Lorsque  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon, K)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$  n'existe pas, on peut définir les dimensions fractales supérieure  $\overline{D}_f$  et inférieure  $\underline{D}_f$  par

$$\overline{D}_f = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon, K)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

$$\underline{D}_f = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon, K)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

3. Cette notion  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon, K)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$  date au moins de 1920-1930 et est souvent appelée *entropie de Kolmogoroff*, *capacité* (terme malheureux, car utilisé avec un autre sens en théorie du potentiel), *densité logarithmique*, etc.

### 2.2.2 Notions équivalentes de dimensions (ou différentes façons de calculer $D_f$ )

Soit  $K$  un compact  $\subset \mathbb{R}^2$ . Supposons que la dimension fractale de  $K$  existe et est égale à  $D_f$ , c'est-à-dire

$$D_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon, K)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

- Désignons par  $\alpha(\varepsilon, K)$  le nombre minimum de carrés de côté  $\varepsilon$  nécessaire pour recouvrir  $K$ . On a

$$D_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \alpha(\varepsilon, K)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (2.10)$$

- Considérons un quadrillage du plan par des carrés de côtés  $\varepsilon$  et désignons par  $\beta(\varepsilon, K)$  le nombre de carrés de ce quadrillage qui contiennent des points de  $K$ . On a

$$D_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \beta(\varepsilon, K)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (2.11)$$

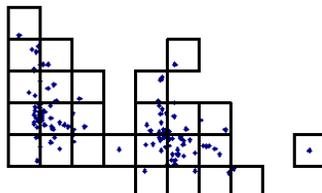
On appelle souvent cette quantité «**box-counting dimension**». C'est la plus utilisée, en pratique, pour évaluer  $D_f$ .

- Désignons par  $\gamma(\varepsilon, K)$  le plus grand nombre de disques disjoints de rayon  $\varepsilon$  et dont les centres appartiennent à  $K$ . On a

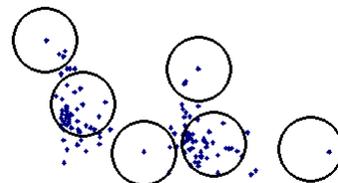
$$D_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \gamma(\varepsilon, K)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (2.12)$$



Recouvrement de  $K$  par des carrés de côté  $\varepsilon$



Carrés d'un quadrillage rencontrant  $K$



Disques de rayon  $\varepsilon$  disjoints centrés en des points de  $K$

- Désignons par  $A(K_\varepsilon)$  l'aire du  $\varepsilon$ -voisinage ( $\varepsilon$ -saucisse de Minkowski) de  $K$ . On a

$$\boxed{D_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( 2 - \frac{\log A(K_\varepsilon)}{\log \varepsilon} \right)} \quad (2.13)$$

Cette quantité est souvent appelée *dimension de Bouligand* (ou dimension de Bouligand-Minkowski).

Donnons une courte justification montrant que la dimension de Bouligand et la dimension box-counting sont égales :

On a, pour  $\varepsilon$  petit,

$$A(K_\varepsilon) \simeq \varepsilon^2 \beta(\varepsilon, K)$$

d'où

$$\log A(K_\varepsilon) \simeq 2 \log \varepsilon + \log \beta(\varepsilon, K)$$

et en divisant par  $\log \varepsilon$ , on a :

$$\frac{\log A(K_\varepsilon)}{\log \varepsilon} \simeq 2 + \frac{\log \beta(\varepsilon, K)}{\log \varepsilon}$$

d'où

$$2 - \frac{\log A(K_\varepsilon)}{\log \varepsilon} \simeq -\frac{\log \beta(\varepsilon, K)}{\log \varepsilon} = \frac{\log \beta(\varepsilon, K)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

- Dans le cas d'une courbe, on a également

$$\boxed{D_c = D_f} \quad (2.14)$$

- Si  $K$  est un sous-ensemble compact auto-similaire se décomposant en parties qui ne pénètrent pas les unes dans les autres, on a que la dimension de similitude égale la dimension fractale, c'est-à-dire

$$\boxed{D_s = D_f} \quad (2.15)$$

Les démonstrations de ces résultats se retrouvent, dans le cas des courbes, dans le livre de C. Tricot et, dans le cas général, dans K. Falconer, *Fractal Geometry*, John Wiley and Sons (1990).

**Remarque.** Pour montrer l'existence et calculer les différentes limites définissant les notions précédentes de dimension, il suffit de montrer (et calculer) les  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  pour une suite de la forme

$$\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ avec } \varepsilon_n = r^n \text{ où } 0 < r < 1 \left( \text{e.g. } \varepsilon_n = \frac{1}{2^n}, \frac{1}{3^n}, \dots \right)$$

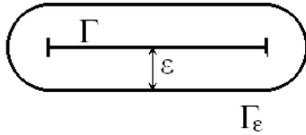
c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 D_f &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(\varepsilon_n, K)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon_n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{\log N(r^n, K)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{\log \alpha(r^n, K)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{\log \beta(r^n, K)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{\log \gamma(r^n, K)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{1}{n} \frac{\log A(K_{r^n})}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \right)
 \end{aligned}$$

### Exemples 2.2.2.

#### a) Segment de droite

On sait déjà que  $D_s = 1$ . Vérifions que la dimension de Bouligand est aussi égale à 1.



Soit  $\Gamma$  un segment de longueur  $\ell$ . On a alors

$$\begin{aligned}
 A(\Gamma_\varepsilon) &= \pi\varepsilon^2 + 2\ell\varepsilon \\
 &= \varepsilon(2\ell + \pi\varepsilon)
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \frac{\log A(\Gamma_\varepsilon)}{\log \varepsilon} &= \frac{\log [\varepsilon(2\ell + \pi\varepsilon)]}{\log \varepsilon} = \frac{\log \varepsilon}{\log \varepsilon} + \frac{\log(2\ell + \pi\varepsilon)}{\log \varepsilon} \\
 &= 1 + \frac{\log(2\ell + \pi\varepsilon)}{\log \varepsilon}
 \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log A(\Gamma_\varepsilon)}{\log \varepsilon} = 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(2\ell + \pi\varepsilon)}{\log \varepsilon} = 1 + 0$$

car

$$\log(2\ell + \pi\varepsilon) \rightarrow \log 2\ell \quad \text{et} \quad \log \varepsilon \rightarrow -\infty \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Par conséquent, la dimension de Bouligand est

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( 2 - \frac{\log A(\Gamma_\varepsilon)}{\log \varepsilon} \right) = 2 - 1 = 1 = D_f.$$

#### b) Courbes de longueur finie

Soit  $\Gamma$  une courbe de longueur finie. On a vu (p. 58) que la longueur de  $\Gamma$  peut être obtenue par

$$\ell(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(\Gamma_\varepsilon)}{2\varepsilon} \tag{2.16}$$

d'où

$$A(\Gamma_\varepsilon) \simeq 2\varepsilon\ell(\Gamma)$$

et

$$\log A(\Gamma_\varepsilon) \simeq \log \varepsilon + \log 2 + \log \ell(\Gamma).$$

Ainsi,

$$\frac{\log A(\Gamma_\varepsilon)}{\log \varepsilon} = 1 + \frac{\log 2}{\log \varepsilon} + \frac{\log \ell(\Gamma)}{\log \varepsilon} \rightarrow 1 \quad \text{si } \varepsilon \rightarrow 0$$

car

$$\log \varepsilon \rightarrow -\infty \text{ si } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ et } \ell(\Gamma) < \infty.$$

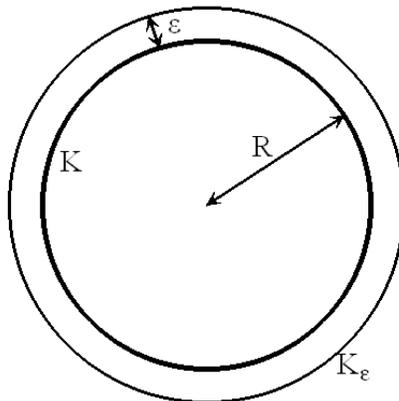
Donc

$$D_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( 2 - \frac{\log A(\Gamma_\varepsilon)}{\log \varepsilon} \right) = 2 - 1 = 1.$$

**Note :** Plus rigoureusement, on déduit de (2.16) qu'il existe des constantes positives  $c_1$  et  $c_2$  telles que  $c_1\varepsilon\ell(\Gamma) \leq A(\Gamma_\varepsilon) \leq c_2\varepsilon\ell(\Gamma)$  et de là, on procède de façon analogue.

### c) Disque fermé de rayon $R$

Soit  $K$  un disque fermé de rayon  $R$ . Alors  $K_\varepsilon$  est le disque de rayon  $R + \varepsilon$  ayant le même centre. Ainsi,  $A(K_\varepsilon) = \pi(R + \varepsilon)^2$  et  $\log A(K_\varepsilon) = \log \pi + 2 \log(R + \varepsilon)$ , d'où



On obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log A(K_\varepsilon)}{\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \pi}{\log \varepsilon} + 2 \frac{\log(R + \varepsilon)}{\log \varepsilon} = 0$$

car

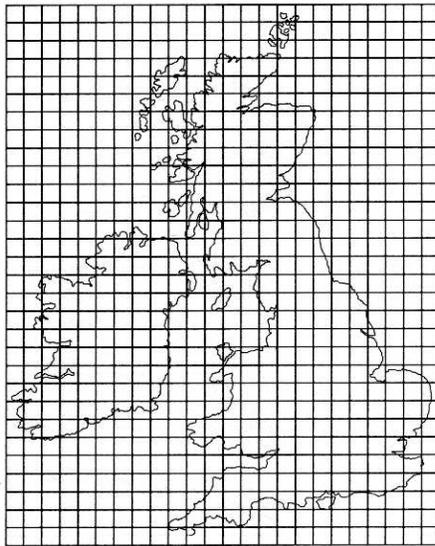
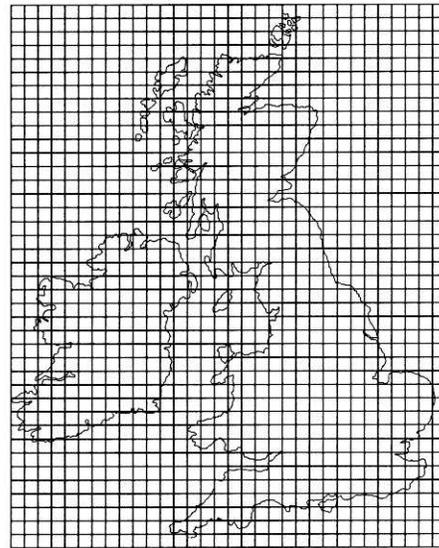
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(R + \varepsilon)}{\log \varepsilon} = 0 \quad (\text{exercice}).$$

Par conséquent, la dimension du disque est

$$D_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( 2 - \frac{\log A(K_\varepsilon)}{\log \varepsilon} \right) = 2 - 0 = 2.$$

## d) Côte de la Grande-Bretagne

On avait déjà obtenu  $D_c \simeq 1.3$ . Comparons avec la dimension «box-counting». Prenons une grille de largeur 1.

Grille avec des carrés de côtés  $\frac{1}{24}$ Grille avec des carrés de côtés  $\frac{1}{32}$ 

Source : Peitgen, Maletsky, Jürgens, Perciante, Saupe, Yunker, *Fractals for the classroom : Strategic activities volume one*, Springer-Verlag, 1991, p.100.

Posons  $\varepsilon_1 = \frac{1}{24}$  et  $\varepsilon_2 = \frac{1}{32}$ . En comptant le nombre de carrés qui contiennent des points de la courbe, on obtient  $\beta(\varepsilon_1, \Gamma) = 194$  et  $\beta(\varepsilon_2, \Gamma) = 283$ . On sait que

$$\frac{\log \beta(\varepsilon, \Gamma)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \simeq D_f \quad \text{si } \varepsilon \text{ est petit}$$

c'est-à-dire

$$\log \beta(\varepsilon, \Gamma) \simeq D_f \log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

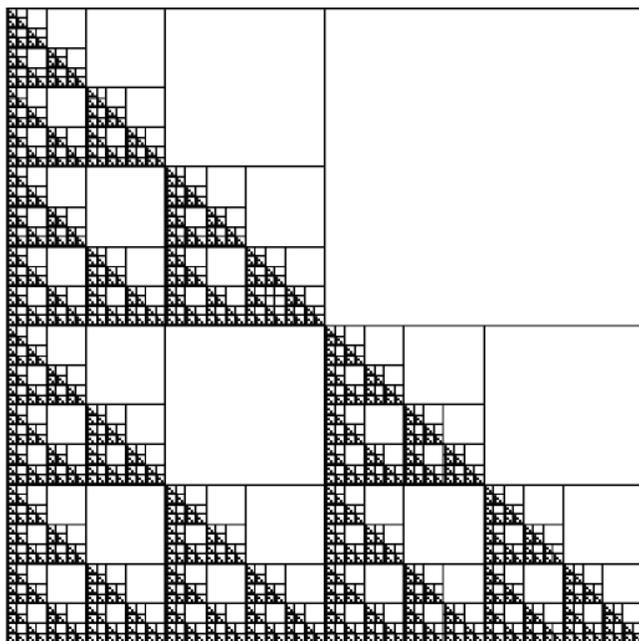
En d'autres mots,  $D_f$  est la pente de la droite reliant les points  $\left(\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \log \beta(\varepsilon, \Gamma)\right)$ . N'ayant ici que deux valeurs de  $\varepsilon$ , on aura une approximation de  $D_f$  en prenant la pente de la droite passant par les points  $\left(\log \frac{1}{\varepsilon_1}, \log \beta(\varepsilon_1, \Gamma)\right)$  et  $\left(\log \frac{1}{\varepsilon_2}, \log \beta(\varepsilon_2, \Gamma)\right)$ , c'est-à-dire

$$D_f \simeq \frac{\log 283 - \log 194}{\log 32 - \log 24} \simeq 1.31.$$

On a donc bien  $D_f \simeq D_c$ .

## e) Triangle de Sierpinski

On a déjà vu que  $D_s = \frac{\log 3}{\log 2}$ . Calculons la dimension en utilisant la méthode du «box-counting».



Considérons une grille initiale constituée d'un carré de côté 1. Ensuite, on considère des grilles successives de carrés de côté  $\frac{1}{2}$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ , ...,  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ , ... Il y a trois carrés de côté  $\frac{1}{2}$  qui rencontrent le triangle de Sierpinski  $K$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \beta\left(\frac{1}{2}, K\right) &= 3 = 3^1. \quad \text{On a} \\ \beta\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2, K\right) &= 9 = 3^2 \\ \beta\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3, K\right) &= 27 = 3^3 \\ &\vdots \\ \beta\left(\frac{1}{2^n}, K\right) &= 3^n \end{aligned}$$

En prenant  $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$ , on obtient

$$\begin{aligned} D_f &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \beta\left(\frac{1}{2^n}, K\right)}{\log\left(\frac{1}{2^n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3^n}{\log 2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 3}{n \log 2} = \frac{\log 3}{\log 2}. \end{aligned}$$

### 2.2.3 Exercices

1. Montrer que pour tout ensemble  $F$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $N(4\varepsilon, F) \leq \gamma(\varepsilon, F) \leq N(\varepsilon, F)$  (selon les définitions de la page 67).

Solution

2. Expliquer pourquoi on peut dire que si  $D_f(F) = s$  alors  $N(\varepsilon, F) \cong \varepsilon^{-s}$ .

Solution

Si on écrit simplement la définition avec  $N(\varepsilon, F)$  et qu'on remplace la limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  par  $\cong$  lorsque  $\varepsilon$  est petit, on a

$$s \cong \frac{\log N(\epsilon, F)}{\log(1/\epsilon)},$$

ce qui donne le résultat en enlevant les logs.

3. Montrer que  $h^0(F)$  donne le nombre de points de  $F$ .

Solution

Si  $F$  est un ensemble fini de  $N$  points, alors lorsque  $\epsilon$  est inférieur à la distance minimale entre deux points, on a facilement  $h_\epsilon^s(F) = N$ .

Si  $F$  est infini, on considère un sous-ensemble fini  $F_N$  de  $F$  qui contient  $N$  points. Lorsque  $\epsilon$  est inférieur à la distance minimale entre deux points de  $F_N$ , on a facilement  $h_\epsilon^s(F) \geq h_\epsilon^s(F_N) = N$ . Or un tel ensemble  $F_N$  existe pour tout  $N$ , et on a  $h^s(F) = \infty$ .

4. À partir de la définition, montrer que  $h^s(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} h^s(F_i)$ .

Solution

Cette preuve est directe puisque si on a un  $\epsilon$ -recouvrement de chaque  $F_i$ , alors l'union de ces ensembles est un  $\epsilon$ -recouvrement de  $F$ .

5. Soit  $f : R \rightarrow R$  une fonction de classe  $C^1$ . Montrer que  $D_H(f(F)) \leq D_H(F)$  pour tout ensemble  $F$ . (Suggestion : traiter d'abord le cas où  $F$  est borné.)

Solution

On montre, comme cela a été expliqué en classe, que le résultat est vrai pour tout ensemble borné en appliquant directement le théorème vu en classe pour les fonctions de type Lipschitz (ou Hölder).

Pour avoir la solution pour les ensembles non-bornés, il y a quelques manières de procéder. En voici une.

Soit  $F = \cup_{i=1}^{\infty} F_i$ . Alors il découle de l'exercice précédent que  $h^s(F) \neq 0 \Rightarrow h^s(F_i) \neq 0$  pour au moins un  $i$ .

De plus, il est clair de la définition que  $h^s(F) = 0 \Rightarrow h^s(F_i) = 0$  pour tout  $i$ .

On a alors les implications suivantes (voyez comment ce qui est écrit plus haut justifie chacun des passages)

$$\begin{aligned} h^s(F) = 0 &\Rightarrow h^s(F \cap (D(0, n))) = 0 \quad \forall n \\ &\Rightarrow h^s(f(F \cap (D(0, n)))) = 0 \quad \forall n \\ &\Rightarrow h^s(\cup_{n=1}^{\infty} f(F \cap (D(0, n)))) = 0 \quad \forall n \\ &\Rightarrow h^s(f(F)) = 0 \end{aligned}$$

6. Calculer la dimension fractale de l'ensemble de Cantor en utilisant le *box-counting*.

Solution

7. Montrer que  $D_H$  vérifie bien la propriété P3.

Solution

Travail direct sur la définition.

Si  $h^s(G)$  ou  $h^s(H)$  n'est pas nul, alors il en est de même de  $h^s_\epsilon(H \cup G)$ .

On a aussi (voir exercice 4) que  $h^s(H \cup G) \leq h^s(G) + h^s(H)$ .

En combinant ces deux inégalités, on a le résultat.

8. Donner un argument heuristique indiquant pourquoi on a  $D_H(F) = D_f(F)$  pour plusieurs types d'ensemble  $F$ . (On comparera  $D_f$  et  $D_H$  en utilisant une définition bien choisie pour  $D_f$ .)

Solution

## 2.3 Remarques finales et dimension de Hausdorff

### 2.3.1 Sur la dimension de similitude

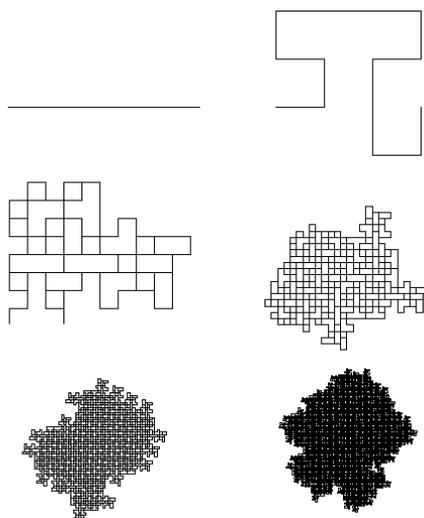
Si  $K \subset \mathbb{R}^2$  est auto-similaire, il existe des parties  $K_1, \dots, K_N$  et des similitudes  $w_1, \dots, w_N$  tels que  $K_1 = w_1(K), \dots, K_N = w_N(K)$  et  $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_N$ . Si  $K_1, \dots, K_N$  sont disjoints ou ne font que s'effleurer, on définit la dimension de similitude de  $K$  par  $D_s(K)$  l'unique solution de

$$r_1^D + r_2^D + \dots + r_N^D = 1 \quad \text{où } r_1, \dots, r_N$$

sont les rapports des similitudes  $w_1, \dots, w_N$ .

On pourrait être tenté de définir la dimension de similitude, même si certains  $K_i$  pénètrent dans les autres. Cependant, on pourrait alors obtenir des sous-ensembles auto-similaires de  $\mathbb{R}^2$  de dimension  $> 2$ , comme le montre l'exemple qui suit.

#### Exemple 2.3.1.



Considérons l'ensemble  $K$  obtenu itérativement de la façon illustrée (on peut le construire à l'aide d'un  $L$ -système). À chaque étape, la figure s'obtient avec 13 similitudes de rapport  $\frac{1}{3}$  à partir de la figure de l'étape précédente. Donc, on aura

$$K = w_1(K) \cup \dots \cup w_{13}(K)$$

où  $w_1, \dots, w_{13}$  sont des similitudes de rapport  $\frac{1}{3}$ . La dimension de similitude serait alors

$$D_s(K) = \frac{\log 13}{\log 3} \simeq 2.335 \dots$$

ce qui est assez incongru, car  $K \subset \mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^2$  est de dimension 2.

### 2.3.2 Sur la dimension fractale

Le terme dimension fractale pour les différentes notions équivalentes (capacité, box-counting, Bouligand, ...) n'est pas universellement accepté, car cette dimension n'a pas toutes les propriétés que doit avoir une bonne notion de dimension, à savoir :

$P_1$  :  $\dim(H)$  définie par tout  $H \subset \mathbb{R}^2$  (de  $\mathbb{R}^n$  en général)

$P_2$  :  $\dim(H) \leq \dim(G)$  si  $H \subset G$

$P_3$  :  $\dim(H \cup G) = \max\{\dim(H), \dim(G)\}$

$P_4$  :  $\dim(\cup_{i=1}^{\infty} H_i) = \sup_{1 \leq i \leq \infty} \dim(H_i)$

$P_5$  :  $\dim w(H) = \dim H$  si  $w$  est une similitude ou une application affine inversible

$P_6$  :  $\dim H = 0$  si  $H$  est un ensemble fini ou un ensemble dénombrable

$P_7$  :  $\dim H = 2$  si  $H$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  ( $\dim H = n$  si  $H$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ )

$P_8$  :  $\dim H = 1$  si  $H$  est une courbe différentiable

$\dim H = 2$  si  $H$  est une surface différentiable

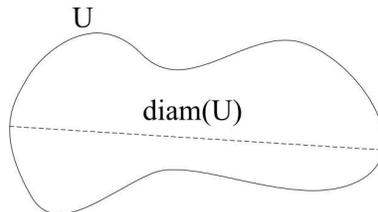
( $\dim H = n$  si  $H$  est une variété différentiable de dimension  $n$ )

La dimension fractale vérifie les propriétés  $P_2, P_3, P_5, P_7, P_8$  et partiellement  $P_6$  ( $D_f(H) = 0$  si  $H$  est fini, mais on n'a pas nécessairement  $D_f(H) = 0$  si  $H$  est dénombrable e.g. si  $H = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}, \dots\right\}$ , on a  $D_f(H) = \frac{1}{2}$ , ce qui montre également que  $P_4$  n'est pas vérifiée).

Il existe une bonne notion de dimension, c'est la dimension de Hausdorff que nous définirons plus loin. Cependant, la dimension de Hausdorff est en général très difficile (voire impossible) à calculer, mais elle possède les bonnes propriétés mathématiques et pour beaucoup de sous-ensembles intéressants, elle coïncide avec la dimension fractale. C'est la raison pour laquelle la dimension fractale (surtout la version «box-counting») est celle qui est la plus utilisée dans la pratique.

### 2.3.3 Dimension de Hausdorff

**Définition 2.3.2.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Le *diamètre* de  $U$  est  $\text{diam}(U) = \sup\{d_2(P, Q) \mid P, Q \in U\}$ .



**Définition 2.3.3.** Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Un *recouvrement ouvert* de  $K$  est une famille dénombrable (ou finie)  $\{U_1, U_2, U_3, \dots, U_n, \dots\}$  de sous-ensembles ouverts telle que

$$K \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_i.$$

Soient  $s$  et  $\varepsilon$  deux nombres positifs, on pose

$$h_\varepsilon^s(K) = \inf \left( \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s \right)$$

où l'inf est pris sur tous les recouvrements ouverts  $\{U_1, U_2, \dots\}$  de  $K$  tels que  $\text{diam}(U_i) < \varepsilon$  pour  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Notons que cette quantité peut être  $\infty$ .

On a  $h_{\varepsilon_1}^s(K) \leq h_{\varepsilon_2}^s(K)$  si  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$  c'est-à-dire, avec  $s$  fixé, la fonction  $\varepsilon \mapsto h_\varepsilon^s(K)$  est décroissante. Évidemment, elle est aussi positive. Ainsi,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon^s(K)$  existe (elle peut être  $\infty$ ).

**Définition 2.3.4.** La *mesure  $s$ -dimensionnelle de Hausdorff*, notée  $h^s(K)$ , est cette limite :

$$h^s(K) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon^s(K) \in [0, \infty].$$

On a le résultat fondamental suivant.

**Théorème 2.3.5.** *Soit  $K$  un sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}^n$ . Alors, il existe un unique nombre réel  $D_H \in [0, n]$  tel que*

$$h^s(K) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < D_H \\ 0 & \text{si } s > D_H \end{cases}$$

**Définition 2.3.6.**  $D_H$  est appelé la *dimension de Hausdorff* de  $K$  que l'on désigne aussi  $D_H(K)$ .

On pourra consulter le livre de K. Falconer (voir p. 86) pour la démonstration de ce résultat et de ce qui suit.

- La dimension de Hausdorff possède les propriétés  $P_1$  à  $P_8$  (p. 75).
- Si  $K \subset \mathbb{R}^n$  est borné, on a toujours

$$0 \leq D_H(K) \leq D_f(K) \leq n.$$

- Si  $K \subset \mathbb{R}^n$  est auto-similaire et se décompose en parties  $K_1, \dots, K_N$  similaires qui sont disjointes ou s'effleurent, on a

$$D_s(K) = D_f(K) = D_H(K).$$

**Note :** La dimension de Hausdorff est aussi souvent appelée dimension de Hausdorff-Besicovitch, car même si elle a été introduite par Hausdorff, Besicovitch est le mathématicien qui a le plus contribué à son étude et à son développement.

### 2.3.4 Dimension fractale en dimension $n$

Les différentes notions équivalentes introduites à la section 2.2 (p.67) dans  $\mathbb{R}^2$  se généralisent dans  $\mathbb{R}^n$ .

- Dans  $\mathbb{R}^3$ , on remplace les carrés de côté  $\varepsilon$  par des cubes d'arête  $\varepsilon$  et les disques de rayon  $\varepsilon$  par des boules de rayon  $\varepsilon$ . De façon analogue dans  $\mathbb{R}^n$ , on prend des hypercubes et des hypersphères.
- Pour la dimension de Bouligand dans  $\mathbb{R}^3$ , on prend

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( 3 - \frac{\log \mathcal{V}(K_\varepsilon)}{\log \varepsilon} \right)$$

où  $\mathcal{V}(K_\varepsilon)$  est le volume du  $\varepsilon$ -voisinage  $K_\varepsilon$ .

# Chapitre 3

## Systèmes dynamiques discrets en dimension 1

### 3.1 Introduction

#### 3.1.1 Généralités

**Définition 3.1.1.** Un *système dynamique discret* est un couple  $(X, \phi)$  où  $X$  est un ensemble et  $\phi$  une application

$$\begin{aligned} \phi : X \times \mathbb{N} &\rightarrow X \\ (x, n) &\longmapsto \phi_n(x) \end{aligned}$$

vérifiant

- (i)  $\phi_0(x) = x \quad \forall x \in X$
- (ii)  $\phi_n \circ \phi_m(x) = \phi_{n+m}(x) \quad \forall x \in X$  et  $\forall n$  et  $m \in \mathbb{N}$ .

$X$  est appelé l'*espace de phases* (ou des *états* ou des *configurations*) et  $\phi$  est le *flot*. Pour  $x_0 \in X$ , l'ensemble  $\{\phi_n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}} = \{x_0, \phi_1(x_0), \phi_2(x_0), \dots\}$  est l'*orbite* de  $x_0$ .

#### 3.1.2 Systèmes dynamiques discrets versus itérations de fonctions

Soient  $X$  un ensemble et une fonction  $F : X \rightarrow X$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , désignons par  $F^n = \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{n \text{ fois}}$  la fonction obtenue en composant  $n$  fois  $F$  avec elle-même. Pour  $n = 0$ ,

posons  $F^0 = I$ , où  $I$  est la fonction identité  $I : X \rightarrow X$ . Alors, nous obtenons le système dynamique discret  $(X, \phi)$  où

$$\begin{aligned} \phi : X \times \mathbb{N} &\rightarrow X \\ (x, n) &\mapsto F^n(x). \end{aligned}$$

**Définition 3.1.2.** Soit  $x_0 \in X$ . L'orbite de  $x_0$  s'obtient en itérant  $F$  à partir de  $x_0$ , c'est-à-dire l'orbite  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  est donnée par  $x_{k+1} = F(x_k)$  ( $k \geq 0$ ).

Ce type d'équation est appelé une *équation aux différences*. Ainsi, l'orbite de  $x_0$  s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned} x_0 &\quad \text{donné} \\ x_1 &= F(x_0) \\ x_2 &= F(x_1) = F(F(x_0)) = F^2(x_0) \\ x_3 &= F(x_2) = F(F^2(x_0)) = F^3(x_0) \\ &\vdots \\ x_n &= F(x_{n-1}) = \dots = F^n(x_0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

### 3.1.3 Systèmes dynamiques en dimension 1

Dans la suite de ce chapitre, nous ne considérons que des systèmes dynamiques discrets obtenus en itérant des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $f : I \rightarrow I$  où  $I$  est un intervalle dans  $\mathbb{R}$ .

#### Exemples 3.1.3.

##### a) Intérêts composés

Soit  $C_0$  un capital placé à un taux d'intérêt  $r$  composé annuellement et pour  $n \geq 1$  désignons par  $C_n$  le capital après  $n$  années. On a

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 + rC_0 = (1+r)C_0 \\ C_2 &= C_1 + rC_1 = (1+r)^2C_0 \\ &\vdots \\ C_n &= (1+r)^n C_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

On obtient le système dynamique discret

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (C, n) &\mapsto (1+r)^n C \end{aligned}$$

c'est-à-dire obtenu en itérant la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ C &\mapsto (1+r)C \end{aligned}$$

### b) Modèle logistique de population

Désignons par  $p_0$  la population initiale d'une espèce animale. Un modèle de population souvent considéré est le modèle logistique donné par l'équation aux différences

$$p_{n+1} = rp_n(1 - p_n/K)$$

où  $p_n$  désigne la population après  $n$  périodes de temps (e.g. après  $n$  années,  $n$  mois, etc.) et  $r$  et  $K$  des constantes positives. En fait,  $K$  représente la population maximale que peut supporter le milieu. Ici, on a le système dynamique discret

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (p, n) &\mapsto f^n(p) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ p &\mapsto rp(1 - p/K). \end{aligned}$$

### 3.1.4 Remarque sur la définition de système dynamique discret

Beaucoup d'auteurs définissent un système dynamique discret comme suit.

**Définition 3.1.4.** Un *système dynamique discret* est un couple  $(X, \phi)$  où  $X$  est un ensemble et  $\phi$  une application

$$\begin{aligned} \phi : X \times \mathbb{Z} &\rightarrow X \\ (x, n) &\mapsto \phi_n(x) \end{aligned}$$

vérifiant

- (i)  $\phi_0(x) = x \quad \forall x \in X$
- (ii)  $\phi_n \circ \phi_m(x) = \phi_{n+m}(x) \quad \forall x \in X$  et  $\forall n$  et  $m \in \mathbb{Z}$ .

En particulier, de (i) et (ii), on déduit que  $(\phi_n)^{-1} = \phi_{-n}$  car  $\phi_n \circ \phi_{-n} = \phi_{n-n} = \phi_0 = I$ .

Ici, l'orbite de  $x_0 \in X$  est  $\{\dots, \phi_{-2}(x_0), \phi_{-1}(x_0), x_0, \phi_1(x_0), \phi_2(x_0), \dots\}$ .

Si  $X$  est un ensemble et  $F : X \rightarrow X$  une bijection, on pose pour  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n < 0$ ,

$$F^n = \underbrace{F^{-1} \circ F^{-1} \circ \dots \circ F^{-1}}_{-n \text{ fois}}.$$

On obtient alors le système dynamique discret

$$\begin{aligned} X \times \mathbb{Z} &\rightarrow X \\ (x, n) &\mapsto F^n(x). \end{aligned}$$

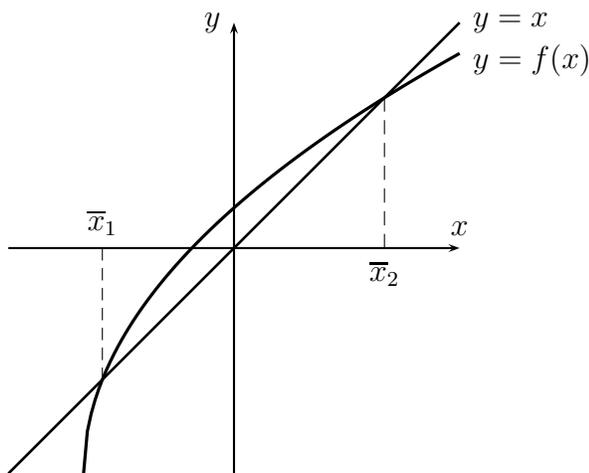
### 3.1.5 Points fixes et points périodiques

Soit  $f : I \rightarrow I$  où  $I = \mathbb{R}$  ou  $I$  est un intervalle dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition 3.1.5.** Un point  $\bar{x} \in I$  est un *point fixe* de  $f$  si  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ .

**Exemple 3.1.6.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^3$ . Alors 0, 1 et  $-1$  sont des points fixes de  $f$ .

Géométriquement, un point fixe  $\bar{x}$  de  $f$  est l'abscisse d'un point d'intersection du graphe de  $f$  avec la droite  $y = x$ .



**Définition 3.1.7.** Un point  $\bar{x} \in I$  est dit un *point périodique* s'il existe un entier  $k$  tel que  $f^k(\bar{x}) = \bar{x}$ . On dit aussi que  $\bar{x}$  est *k-périodique*. Le plus petit entier  $k$  tel que  $f^k(\bar{x}) = \bar{x}$  est appelé la *période minimale* de  $\bar{x}$ .

**Exemple 3.1.8.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  où  $f(x) = x^2 - 1$ . Alors 0 est 2-périodique car  $f(0) = -1$  et  $f(-1) = 0$ , c'est-à-dire  $f^2(0) = f(f(0)) = 0$ . Bien entendu,  $-1$  est aussi 2-périodique.

**Remarques.**

1.  $\bar{x} \in I$  est  $k$ -périodique si et seulement si  $\bar{x}$  est un point fixe de  $f^k$ .
2. Si  $x_0 \in I$  est un point  $k$ -périodique de  $f$ , l'orbite de  $x_0$  est  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$  où  $x_i = f(x_{i-1})$  ( $i = 1, \dots, k-1$ ) et chaque  $x_i$  ( $i = 1, \dots, k-1$ ) est  $k$ -périodique.
3. Si  $\bar{x}$  est  $k$ -périodique,  $\bar{x}$  est aussi  $pk$ -périodique pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . En particulier, un point fixe est  $p$ -périodique  $\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

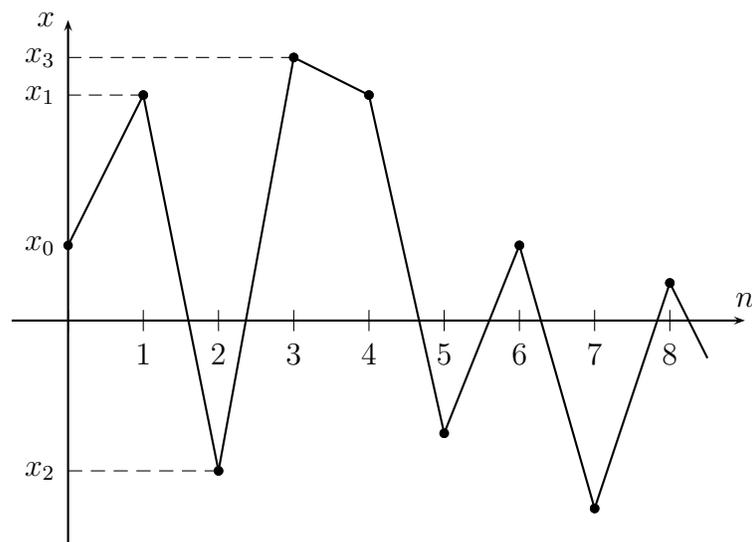
**Définition 3.1.9.** Un point  $x_0 \in I$  est dit *éventuellement fixe* (resp. *éventuellement périodique*) s'il existe un entier  $k$  tel que  $f^k(x_0)$  soit fixe (resp. périodique).

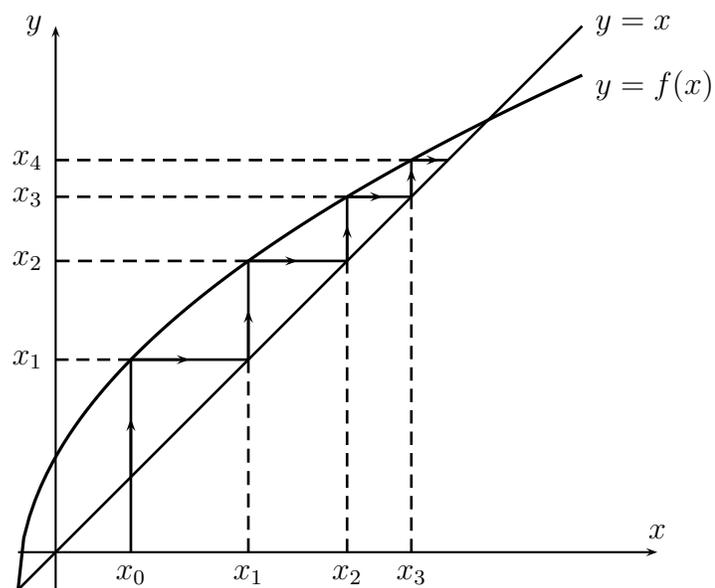
**Exemple 3.1.10.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  où  $f(x) = x^2 - 1$ . Alors 1 est éventuellement périodique car  $f(1) = 0$  et 0 est 2-périodique comme nous l'avons vu dans l'exemple précédent.

### 3.1.6 Interprétations graphiques de l'itération

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  un point initial. L'orbite de  $x_0$  est  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  où  $x_k = f(x_{k-1})$  ( $k \geq 1$ ).

#### Représentation graphique de l'orbite de $x_0$



**Itération graphique****3.1.7 Exercices**

1. Montrer que le couple  $(X, \phi)$  défini à la section 3.1.2 est un système dynamique discret.

## 3.2 Stabilité et principe de linéarisation

### 3.2.1 Stabilité des points fixes

Soient  $f : I \rightarrow I$  avec  $I = \mathbb{R}$  ou  $I$  un intervalle dans  $\mathbb{R}$  et  $\bar{x}$  un point fixe de  $f$ .

**Définition 3.2.1.** Nous dirons que  $\bar{x}$  est un point fixe *attractif* (nous dirons aussi (incorrectement) *stable*) s'il existe un  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x_0 \in ]\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta[$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$  où  $x_n = f^n(x_0)$ .

**Définition 3.2.2.** Nous dirons que  $\bar{x}$  est *instable* s'il n'est pas attractif.

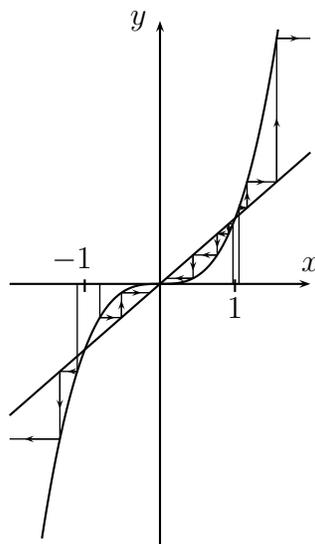
**Définition 3.2.3.** Nous dirons que  $\bar{x}$  est *répulsif* s'il existe un  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x_0 \in ]\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta[$ ,  $x_0 \neq \bar{x}$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x_n \notin ]\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta[$  où  $x_n = f^n(x_0)$ . (En particulier, un point fixe répulsif est instable.)

**Remarque.** Les deux premières définitions ne sont pas admises généralement, mais pour nos besoins, elles sont adéquates.

#### Exemples 3.2.4.

- a) Soit  $f(x) = x^3$ . Pour tout  $x_0$ , on a  $x_n = f^n(x_0) = x_0^{3^n}$ .  
0, 1 et  $-1$  sont des points fixes et on a

$$\begin{aligned} x_n = f^n(x_0) &\longrightarrow 0 && \text{si } |x_0| < 1 \\ x_n = f^n(x_0) &\longrightarrow \infty && \text{si } x_0 > 1 \\ x_n = f^n(x_0) &\longrightarrow -\infty && \text{si } x_0 < -1 \end{aligned}$$



Ainsi, 0 est un point fixe attractif alors que 1 et  $-1$  sont des points fixes répulsifs.



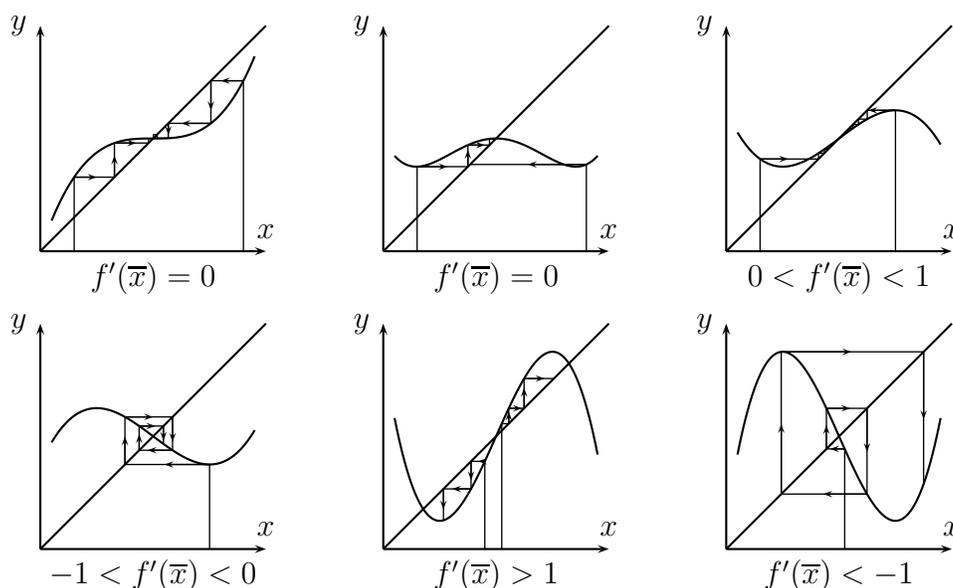
(ii) Démonstration laissée en exercice.

□

**Exemple 3.2.6.** Nous avons vu que 0, 1 et  $-1$  sont des points fixes de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $f(x) = x^3$ . On a  $f'(0) = 0$ ,  $f'(1) = 3$  et  $f'(-1) = 3$  et d'après le principe de linéarisation 0 est attractif alors que 1 et  $-1$  sont répulsifs, ce que nous avons déjà observé.

**Remarque.** Lorsque  $|f'(\bar{x})| = 1$ , on ne peut rien conclure concernant la nature du point fixe comme le montre l'exercice 1 de la page 88.

### Illustration graphique du principe de linéarisation



### 3.2.2 Stabilité des points périodiques

Soient  $f : I \rightarrow I$  avec  $I = \mathbb{R}$  ou  $I$  un intervalle dans  $\mathbb{R}$  et  $u_0 \in I$  un point  $k$ -périodique de  $f$ . Ainsi,  $u_0$  est un point fixe de  $f^k$ .

**Définition 3.2.7.** Nous dirons que  $u_0$  est un point  $k$ -périodique *attractif* (resp. *instable*, resp. *répulsif*) si  $u_0$  est un point fixe attractif (resp. instable, resp. répulsif) de  $f^k$ .

**Théorème 3.2.8** (Principe de linéarisation).

- (i) Si  $|(f^k)'(u_0)| < 1$ ,  $u_0$  est un point  $k$ -périodique attractif.
- (ii) Si  $|(f^k)'(u_0)| > 1$ ,  $u_0$  est un point  $k$ -périodique répulsif.

**Remarque.** Pour calculer  $(f^k)'(u_0)$ , on procède comme suit.

Soit  $\{u_0, f(u_0), f^2(u_0), \dots, f^{k-1}(u_0)\} = \{u_0, u_1, \dots, u_{k-1}\}$  l'orbite de  $u_0$ . On a, par la règle de dérivation en chaîne,

$$\begin{aligned} (f^k)'(u_0) &= (f \circ f \circ \dots \circ f)'(u_0) = (f^{k-1} \circ f)'(u_0) \\ &= (f^{k-1})'(f(u_0)) \cdot f'(u_0) \\ &= (f^{k-2})'(f^2(u_0)) \cdot f'(f(u_0)) \cdot f'(u_0) \\ &= \\ &= f'(u_{k-1}) \cdot f'(u_{k-2}) \cdot \dots \cdot f'(u_1) \cdot f'(u_0) \\ &= \prod_{i=0}^{k-1} f'(u_i) \end{aligned}$$

En particulier, on déduit que

$$(f^k)'(u_0) = (f^k)'(u_1) = \dots = (f^k)'(u_{k-1}).$$

**Exemple 3.2.9.** Soit  $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$ . Le point 0 est un point 3-périodique car  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$  et  $f(2) = 0$ . On a  $f'(0) = \frac{5}{2}$ ,  $f'(1) = -\frac{1}{2}$  et  $f'(2) = -\frac{7}{2}$ , d'où  $(f^3)'(0) = f'(2) \cdot f'(1) \cdot f'(0) = \frac{35}{8} > 1$ . Ainsi, 0 est un point 3-périodique répulsif d'après le principe de linéarisation.

### 3.2.3 Exercices

1. Montrer que pour chacune des fonctions définies par  $f(x) = x + x^3$ ,  $f(x) = x - x^3$  et  $f(x) = x + x^2$ , 0 est un point fixe tel que  $f'(0) = 1$  et déterminer la nature de ce point fixe.
2. Déterminer les points fixes (s'il y en a) et leur stabilité pour les fonctions :
 

a) $f(x) = 3x + 2$	d) $f(x) = x \sin(x)$	g) $f(x) =  x - 1 $
b) $f(x) = x^2 - 2$	e) $f(x) = x^3 - 3x$	h) $f(x) = x^5$
c) $f(x) = 3x(1 - x)$	f) $f(x) =  x $	i) $f(x) = x^6$
3. Déterminer les points 2-périodiques de  $f(x) = 1 - x^2$  et leur stabilité.
4. Soit  $f$  définie par  $f(x) = |x - 1|$ . Trouver les points fixes, éventuellement fixes, périodiques et éventuellement périodiques.
5. Trouver 2 points (non triviaux) dans  $]0, 1[$  pour lesquels le troisième itéré  $x_3$  sera égale à 0 lorsque la fonction utilisée est définie par  $f(x) = 4x(1 - x)$
6. Montrer que tous les points périodiques de la fonction donnée par  $f(x) = 3, 2x(1 - x)$  sont dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

7. Déterminer les points périodiques et leur bassin d'attraction des fonctions :
- a)  $f(x) = x^2$
  - b)  $f(x) = e^x - 1$
  - c)  $f(x) = x^2 - x$
  - d)  $f(x) = x^2 + 1/4$
8. Faire le graphe d'une fonction  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  qui
- a) n'a aucun point fixe.
  - b) a exactement 2 points fixes.
  - c) a exactement 3 points fixes.

### 3.3 Bifurcations

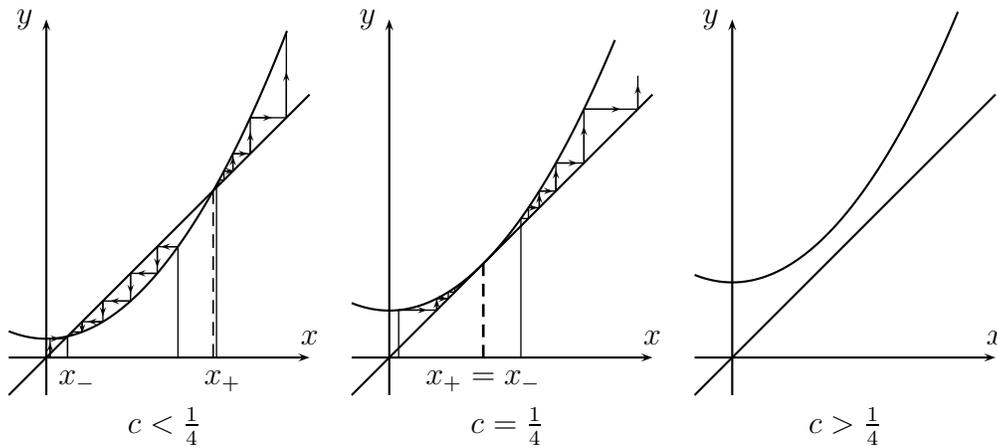
À l'aide d'exemples, nous illustrerons les trois bifurcations génériques (c'est-à-dire typiques) rencontrées avec des systèmes dynamiques discrets en dimension un.

#### 3.3.1 Bifurcation col-noeud

Considérons la fonction  $Q_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $Q_c(x) = x^2 + c$  où  $c$  est un paramètre réel. Les points fixes sont ici les solutions de  $x = x^2 + c$  qui sont

$$\begin{aligned} x_+ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-4c}}{2} \\ x_- &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-4c}}{2} \end{aligned}$$

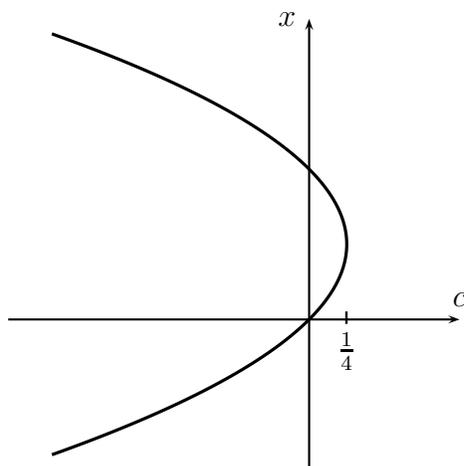
qui existent seulement pour  $c \leq \frac{1}{4}$  (et coïncident si  $c = \frac{1}{4}$ ).



Représentons l'ensemble

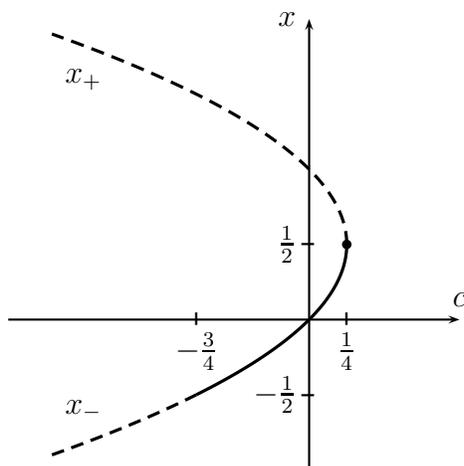
$$D = \{(c, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ point fixe de } Q_c\}.$$

C'est ici la parabole  $x^2 - x + c = 0$  dans le plan  $cOx$ .



Étudions la stabilité des points fixes  $x_+$  et  $x_-$  en fonction de  $c$ . On a  $Q'_c(x) = 2x$ , d'où  $Q'_c(x_+) = 2x_+ = 1 + \sqrt{1 - 4c}$  et  $Q'_c(x_-) = 1 - \sqrt{1 - 4c}$ . D'après le principe de linéarisation, ayant  $Q'_c(x_+) > 1 \quad \forall c < \frac{1}{4}$ ,  $x_+$  est répulsif. Puisque  $Q'_c(x_-) = 1 - \sqrt{1 - 4c}$ ,  $x_-$  est attractif si et seulement si  $|1 - \sqrt{1 - 4c}| < 1$ , c'est-à-dire (exercice) si et seulement si  $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$ .

Afin d'ajouter de l'information à la figure précédente, nous représenterons en pointillés la partie de l'ensemble  $D$  qui correspond à des points fixes instables, ce qui donnera, d'après ce qui précède :



On obtient ainsi une première portion de ce que l'on appelle le *diagramme de bifurcation* de  $Q_c$ .

La situation, concernant les points fixes de  $Q_c$ , que l'on a décrite est

- pour  $c > \frac{1}{4}$ ,  $Q_c$  n'a pas de point fixe ;
- pour  $c = \frac{1}{4}$ ,  $Q_c$  a un seul point fixe  $\bar{x} = \frac{1}{2}$  ;
- pour  $c < \frac{1}{4}$ ,  $Q_c$  a deux points fixes  $x_+$  et  $x_-$ .

L'un est toujours instable, alors que l'autre est stable tant que  $c > -\frac{3}{4}$ .

C'est ce que l'on appelle une *bifurcation col-noeud* (on dit aussi *tangente*).  $c = \frac{1}{4}$  est appelé *valeur de bifurcation* et le point  $(c, x) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$  est appelé *point de bifurcation* (ici, c'est le sommet de la parabole).

### 3.3.2 Bifurcation transcritique

Pour illustrer ce type de bifurcations, nous considérerons le système dynamique

$$\begin{cases} x_0 & \text{donné} \\ x_{k+1} & = rx_k(1 - x_k) \end{cases}$$

où  $r$  est un paramètre réel. Nous nous limiterons au cas  $r > 0$ . La fonction  $f_r(x) = rx(1 - x)$  est appelée la *fonction logistique*.

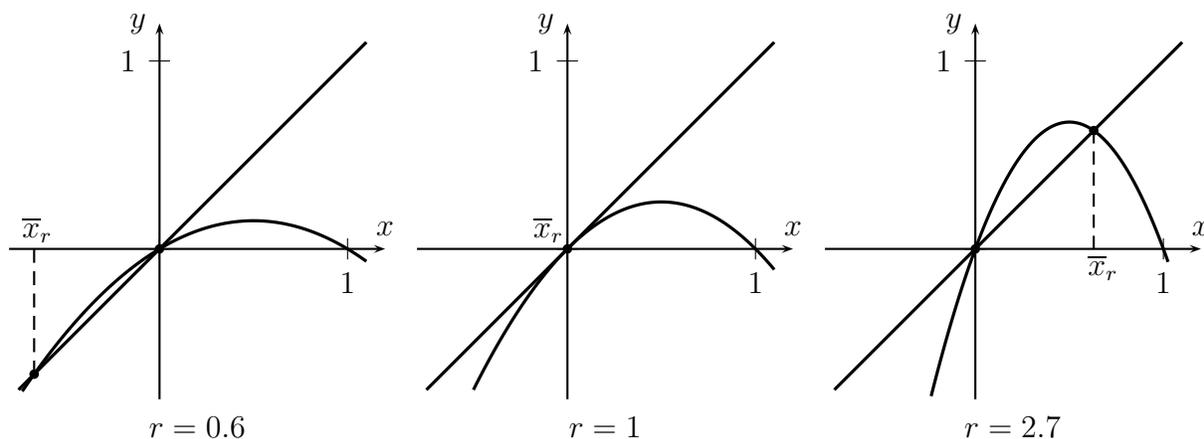
Les points fixes de ce système dynamique sont les solutions de

$$x = rx(1 - x)$$

c'est-à-dire 0 et  $\bar{x}_r = \frac{r-1}{r}$ . On a :

- pour  $r = 1$ , les deux points fixes coïncident ;
- pour  $0 < r < 1$ ,  $\bar{x}_r < 0$  ;
- pour  $r > 1$ ,  $\bar{x}_r > 0$ .

Les figures suivantes illustrent ces trois cas.



On peut aussi représenter les points fixes pour les différentes valeurs du paramètre  $r$  à l'aide de la figure suivante dans le plan  $r0x$  qui est une partie du *diagramme de bifurcation* que nous compléterons plus loin.

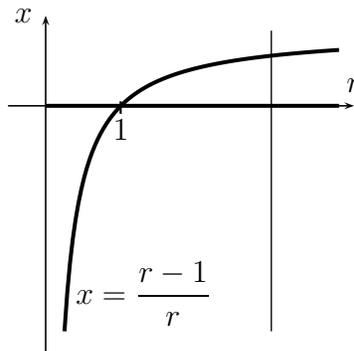
Considérons

$$\begin{aligned} D &= \{(r, x) | x = rx(1 - x)\} \\ &= \{(r, x) | x \text{ est un point fixe de } f_r\} \end{aligned}$$

Il est clair que

$$D = \{(r, x) | x = 0\} \cup \left\{ (r, x) | x = \frac{r-1}{r} \right\},$$

ainsi on obtient la figure



Le point  $(r, x) = (1, 0)$  est un *point de bifurcation*.

Pour  $r$  fixé, l'intersection de  $D$  avec la droite verticale passant par  $(r, 0)$  donne l'ensemble des points fixes de  $f_r$  pour cette valeur de  $r$ .

Pour étudier la stabilité des points fixes de  $f_r$ , nous utilisons la méthode de linéarisation. On a  $f_r(x) = rx(1 - x)$  d'où  $f'_r(x) = r(1 - 2x)$

– **Stabilité du point fixe 0**

On a  $f'_r(0) = r$  et donc  $|f'_r(0)| < 1$  si  $0 < r < 1$  (on ne s'intéresse qu'au cas  $r > 0$ ). Ainsi, 0 est stable si  $0 < r < 1$  et est répulsif (en particulier instable) si  $r > 1$ .

– **Stabilité du point fixe  $\bar{x}_r$**

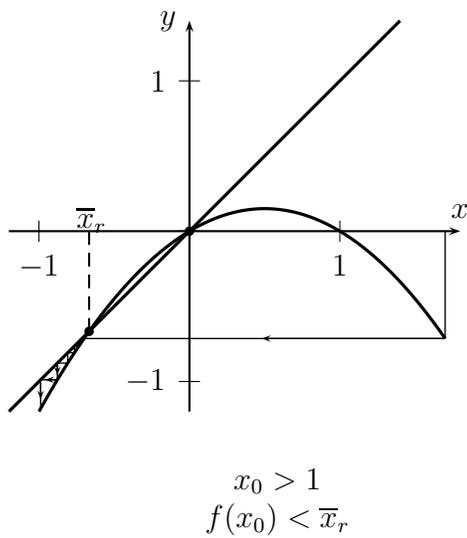
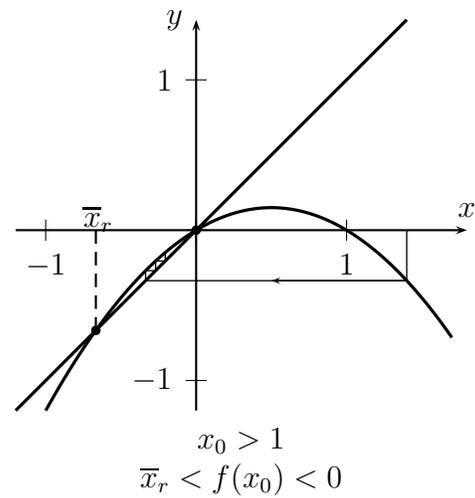
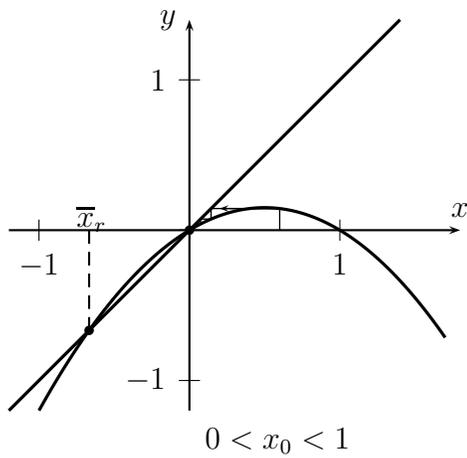
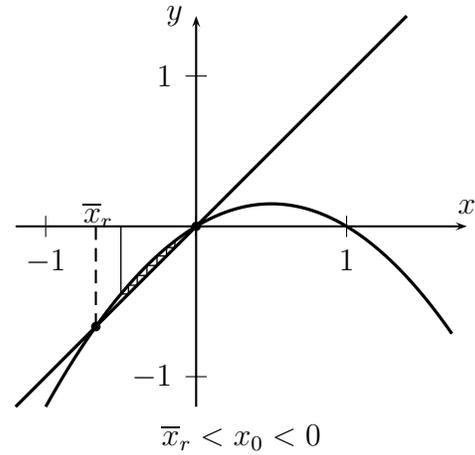
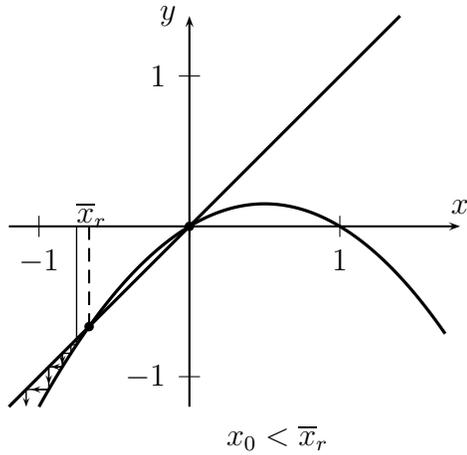
On a  $f'_r(\bar{x}_r) = r \left( 1 - 2 \frac{(r-1)}{r} \right) = 2 - r$  et on aura  $|f'_r(\bar{x}_r)| < 1$  si et seulement si  $1 < r < 3$ . Ainsi,

- $\bar{x}_r$  est répulsif (donc instable) si et seulement si  $0 < r < 1$  ou  $r > 3$ ;
- $\bar{x}_r$  est attractif (donc stable) si et seulement si  $1 < r < 3$ .

Illustrons graphiquement l'itération pour  $0 < r < 3$ .

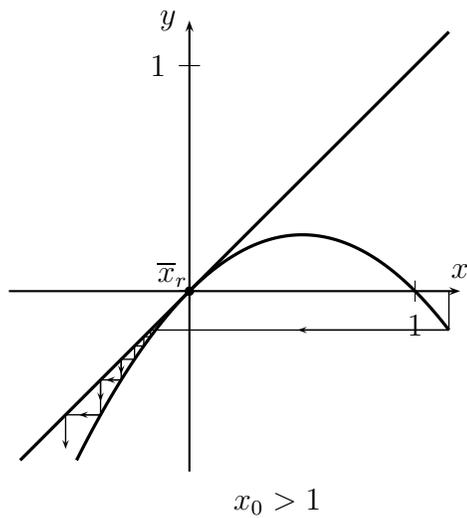
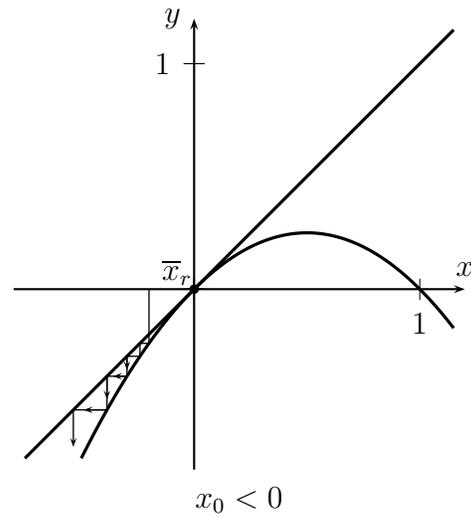
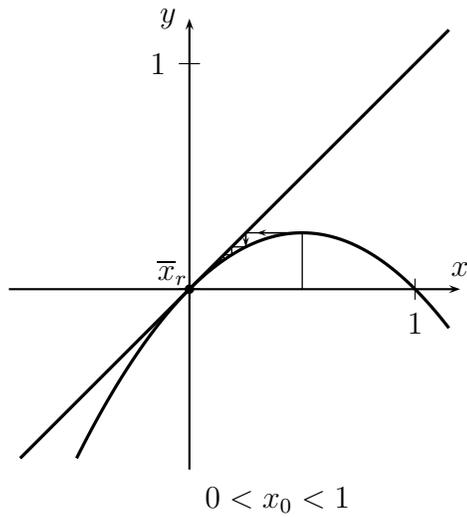
**Le cas  $0 < r < 1$**

Les figures suivantes illustrent l'itération graphique pour divers choix de point de départ.



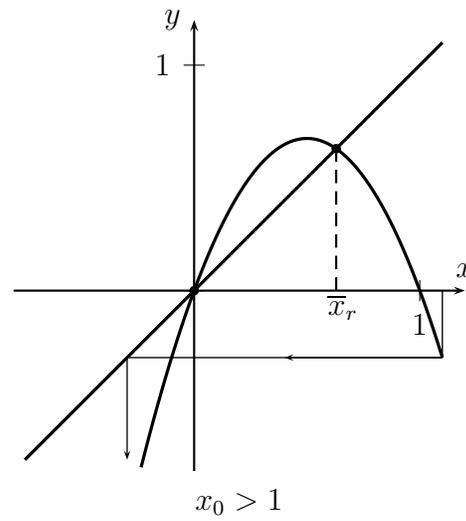
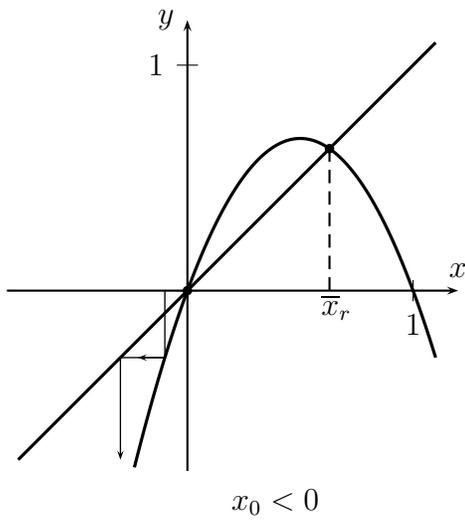
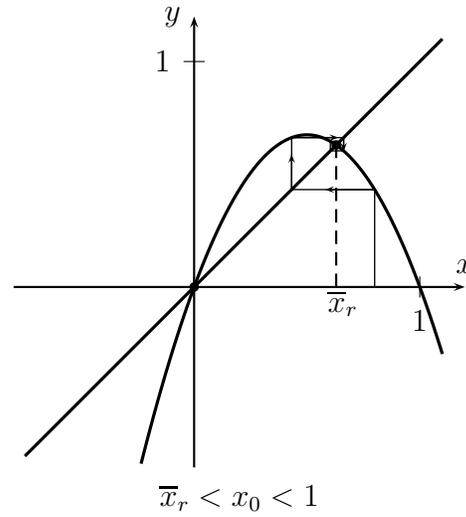
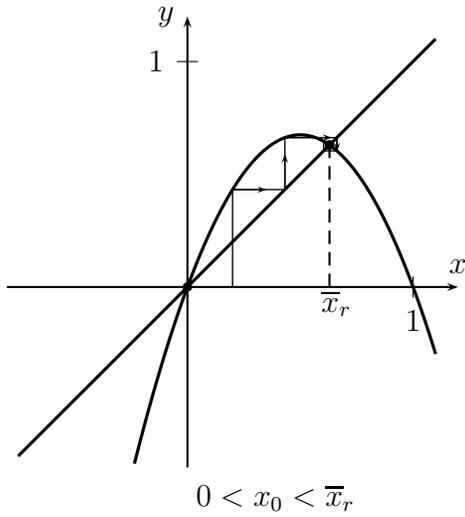
**Le cas  $r = 1$** 

Dans ce cas, les deux points fixes coïncident et on a  $x_n \rightarrow 0$  si  $0 \leq x_0 \leq 1$  et  $x_n \rightarrow -\infty$  si  $x_0 < 0$  ou  $x_0 > 1$ , comme l'illustre les figures qui suivent.



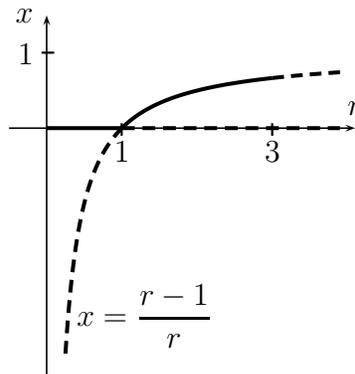
**Le cas  $1 < r < 3$** 

Dans ce cas, 0 est répulsif et  $\bar{x}_r$  est attractif.



### Diagramme de bifurcation partiel

Ayant établi la nature des points fixes, nous allons préciser la figure de la page 93 en indiquant en pointillés les branches constituées de points fixes instables, ce qui donnera :



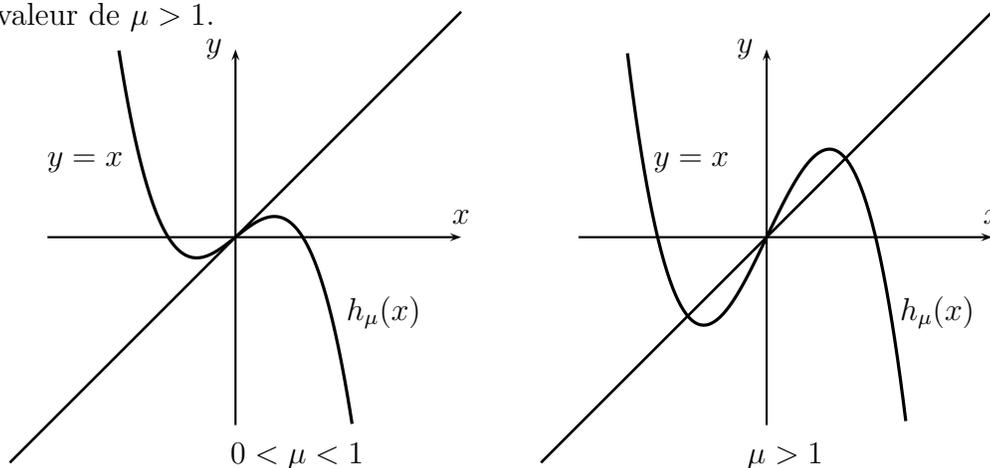
Ce type de bifurcation est appelé *bifurcation transcritique* (et un échange de stabilité) en  $r = 1$ .

### 3.3.3 Bifurcation trident («pitchfork»)

Considérons la fonction dépendant d'un paramètre  $\mu$  définie par  $h_\mu(x) = \mu x - x^3$ . Ici, nous nous limiterons aux valeurs de  $\mu > 0$ .

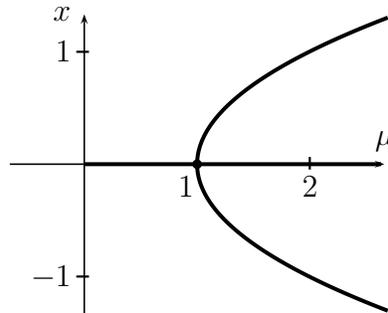
#### – Points fixes

Les points de  $h_\mu$  sont les solutions de  $x = \mu x - x^3$ , c'est-à-dire  $x((\mu-1) - x^2) = 0$ . Ainsi, 0 est un point fixe  $\forall \mu > 0$  et, pour  $\mu > 1$ ,  $h_\mu$  a deux autres points fixes  $\bar{x}_+ = \sqrt{\mu-1}$  et  $\bar{x}_- = -\sqrt{\mu-1}$ . Représentons le graphe de  $h_\mu$  pour une valeur de  $\mu$  entre 0 et 1 et une valeur de  $\mu > 1$ .



Traçons maintenant

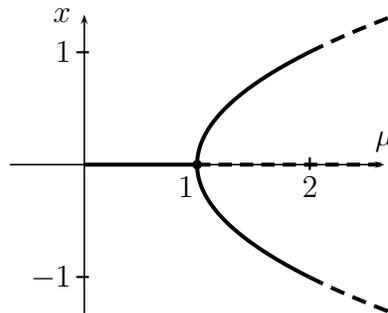
$$\begin{aligned} D &= \{(x, \mu) \mid \mu > 0 \text{ et } x \text{ point fixe de } h_\mu\} \\ &= \{(0, \mu) \mid \mu > 0\} \cup \{(x, \mu) \mid x^2 = \mu - 1, \mu \geq 1\} \end{aligned}$$



#### – Stabilité des points fixes

Nous avons  $h'_\mu(x) = \mu - 3x^2$ . Ainsi  $h'_\mu(0) = \mu$  et  $h'_\mu(\bar{x}_+) = h'_\mu(\bar{x}_-) = 3 - 2\mu$ . Il s'ensuit donc que 0 est attractif si  $0 < \mu < 1$  et répulsif si  $\mu > 1$ , alors que  $\bar{x}_+$  et  $\bar{x}_-$  sont attractifs pour  $1 < \mu < 2$  et répulsifs si  $\mu > 2$ .

Avec la même convention concernant les pointillés, nous obtenons la figure suivante.



Ce type de bifurcation s'appelle «*pitchfork*» (que nous traduisons par *trident* et non par *fourche* qui est la traduction littérale de *pitchfork*).

### 3.3.4 Bifurcation doublement de période

Nous considérons encore ici la fonction logistique, c'est-à-dire  $f_r(x) = rx(1-x)$ . Nous avons (voir sous-section 3.3.2)  $f'_r(\bar{x}_r) = 2 - r$ , d'où

- $f'_r(\bar{x}_r) > -1$  si  $r < 3$
- $f'_r(\bar{x}_r) = -1$  si  $r = 3$
- $f'_r(\bar{x}_r) < -1$  si  $r > 3$

Ainsi, en  $r = 3$ , le point fixe  $\bar{x}_r$  «perd sa stabilité». Montrons que des points de période 2 bifurquent du point fixe  $\bar{x}_r$  lorsque  $r = 3$ .

Les points de période 2 sont les solutions de

$$x = f_r^2(x) = r^2x(1-x)[1-rx(1-x)],$$

c'est-à-dire

$$r^2x(1-x)[1-rx(1-x)] - x = 0 \quad (3.1)$$

Puisque 0 et  $\bar{x}_r = \frac{r-1}{r}$  sont des points fixes, ce sont aussi des points de période 2. Ainsi, on a

$$r^2x(1-x)[1-rx(1-x)] - x = x(x - \bar{x}_r)p_2(x)$$

où  $p_2(x)$  est un polynôme de degré 2 obtenu en divisant le polynôme de gauche par  $x \left( x - \frac{r-1}{r} \right)$ .

On obtient  $p_2(x) = -r(r^2x^2 - r^2x - rx + r + 1)$  dont les racines sont

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{1}{2r} \left[ r + 1 + \sqrt{(r+1)(r-3)} \right] \\ q_r &= \frac{1}{2r} \left[ r + 1 - \sqrt{(r+1)(r-3)} \right] \end{aligned}$$

et qui existent dans  $\mathbb{R}$  pour  $r \geq 3$ . Lorsque  $r = 3$ ,

$$p_r = q_r = \bar{x}_r = \frac{2}{3}.$$

### Études maintenant la stabilité des points de période 2.

À cette fin, on calcule  $(f_r^2)'(p_r)$  (qui est aussi égale à  $(f_r^2)'(q_r)$ , car  $f_r(p_r) = q_r$  et  $f_r(q_r) = p_r$ ).

Nous avons

$$\begin{aligned} (f_r^2)'(p_r) &= f_r'(f_r(p_r)) \cdot f_r'(p_r) \\ &= f_r'(q_r) \cdot f_r'(p_r) \\ &= [r(1-2q_r)][r(1-2p_r)] \\ &= r^2(1-2(p_r+q_r) + 4p_rq_r) \\ &= 4 + 2r - r^2 \end{aligned}$$

Ainsi,  $p_r$  est attractif pour les valeurs de  $r$  telles que

$$|4 + 2r - r^2| < 1$$

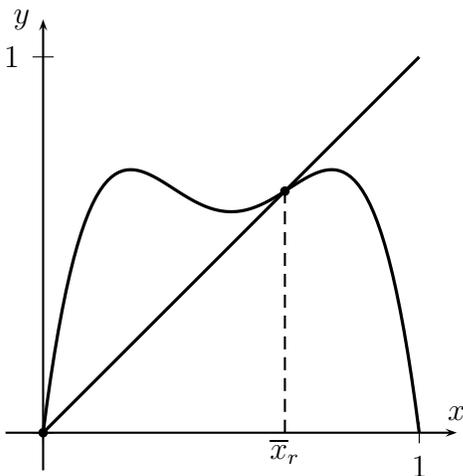
c'est-à-dire pour

$$3 < r < 1 + \sqrt{6}$$

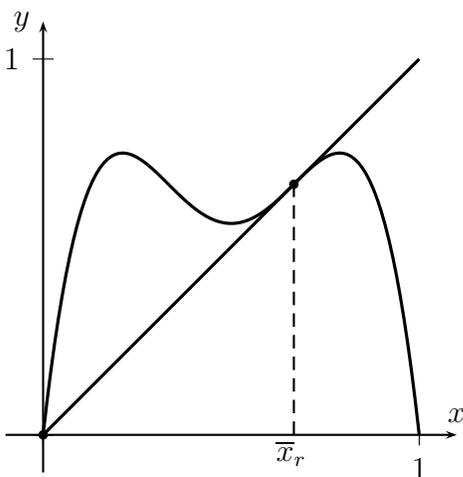
et  $p_r$  est répulsif pour  $r > 1 + \sqrt{6}$ . Il en est de même pour  $q_r$ .

Illustration géométrique de la bifurcation doublement de période en  $r = 3$ 

Les points de période 2 sont les points fixes de  $f_r^2$  et, en particulier, les points fixes 0 et  $\bar{x}_r$  de  $f_r$  sont des points fixes de  $f_r^2$ . Les figures qui suivent illustrent le graphe de  $f_r^2$  pour des valeurs de  $r$  près de 3.

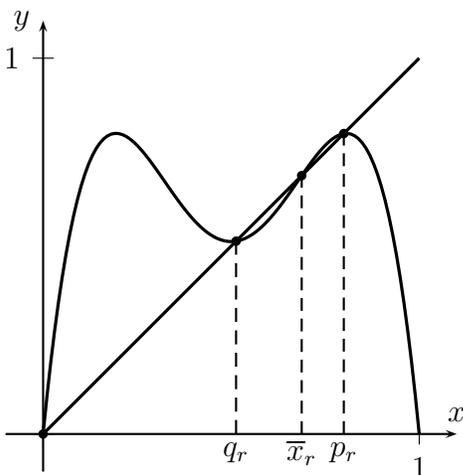


Pour  $r = 2.8$ ,  $f_r^2$  a deux points fixes : 0 et  $\bar{x}_r$ , c'est-à-dire les points fixes de  $f_r$ . 0 est instable et  $\bar{x}_r$  est stable.



Pour  $r = 3$ , les deux seuls points fixes de  $f_r^2$  sont les points fixes 0 et  $\bar{x}_r$  de  $f_r$ . En  $\bar{x}_r$ , on a

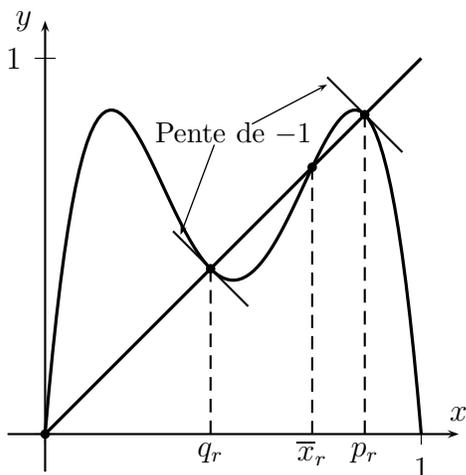
$$\begin{aligned} (f_r^2)'(\bar{x}_r) &= f_r'(f_r(\bar{x}_r)) \cdot f'(\bar{x}_r) \\ &= f_r'(\bar{x}_r) \cdot f'(\bar{x}_r) \\ &= (-1)(-1) = 1 \end{aligned}$$



Pour  $3 < r < 1 + \sqrt{6}$  ( $r = 3.2$  sur la figure),  $f_r^2$  a quatre points fixes :

- 0 et  $\bar{x}_r$  qui sont les points fixes de  $f_r$  ; ils sont répulsifs ;
- $p_r$  et  $q_r$ , qui sont des points de période 2 attractifs car

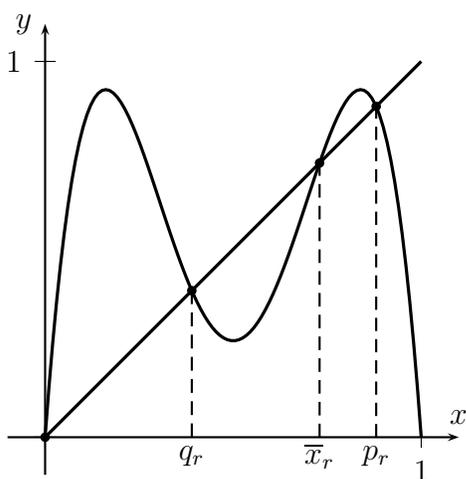
$$|(f^2)'(p_r)| = |(f^2)'(q_r)| < 1.$$



Pour  $r = 1 + \sqrt{6}$ , on a les deux points fixes répulsifs de  $f_r$  : 0 et  $\bar{x}_r$  et les deux points de période 2,  $p_r$  et  $q_r$ . Lorsque  $r = 1 + \sqrt{6}$ , on a

$$(f^2)'(p_r) = (f^2)'(q_r) = -1.$$

On peut donc s'attendre à une bifurcation doublement de période en  $r = 1 + \sqrt{6}$  (pour la fonction  $f_r^2$ ).

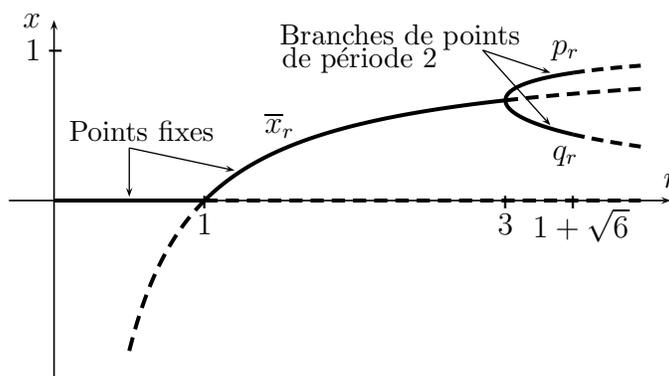


Pour  $r > 1 + \sqrt{6}$  ( $r = 3.7$  sur la figure), on a les deux points fixes répulsifs de  $f_r$ , 0 et  $\bar{x}_r$  et deux points de période 2,  $p_r$  et  $q_r$ , qui sont aussi répulsifs car

$$|(f^2)'(p_r)| = |(f^2)'(q_r)| > 1.$$

### Diagramme de bifurcation (continuation)

Les résultats précédents nous permettent d'ajouter au diagramme de la page 97.



### 3.3.5 Exercices

1. Pour les exercices suivants, il est parfois utile d'utiliser la remarque suivante : ayant une fonction impaire, remarquer que si  $f_\lambda(x) = -x$ , alors  $x$  est 2-périodique.
2. Pour chacune des fonctions ci-dessous, il y a une bifurcation pour la valeur donnée du paramètre. Identifier le type de bifurcation et représenter la partie du diagramme de bifurcation au voisinage du point de bifurcation :

a) $f_\lambda(x) = x + x^2 + \lambda, \quad (\lambda = 0)$	f) $s_\mu(x) = \mu \sin(x), \quad (\mu = -1)$
b) $f_\lambda(x) = x + x^2 + \lambda, \quad (\lambda = -1)$	g) $h_c(x) = x + cx^2 + x^3, \quad (c = 0)$
c) $g_\mu(x) = \mu x + x^3, \quad (\mu = 1)$	h) $a_\lambda(x) = \lambda \arctan(x), \quad (\lambda = -1)$
d) $g_\mu(x) = \mu x + x^3, \quad (\mu = -1)$	i) $h_\lambda(x) = \lambda \sinh(x), \quad (\lambda = 1)$
e) $s_\mu(x) = \mu \sin(x), \quad (\mu = 1)$	

3. Pour la fonction définie par  $Q_c(x) = x^2 + c$ , déterminer, jusqu'à la seconde bifurcation doublement de période, le diagramme de bifurcation comme nous l'avons fait pour la fonction logistique.
4. Considérons la fonction définie par  $f_\lambda(x) = \lambda x - x^3$ . Montrer que les points  $\pm\sqrt{\lambda + 1}$  qui existent pour  $\lambda > -1$  sont 2-périodiques. Sont-ils attractifs, instables ou répulsifs ?
5. Soit  $f_\lambda(x) = x^5 - \lambda x^3$ . Quel type de bifurcation a-t-on en  $\lambda = 2$  ? Même question pour  $f_\lambda(x) = x^5 - \lambda x$  en  $\lambda = 1$ .

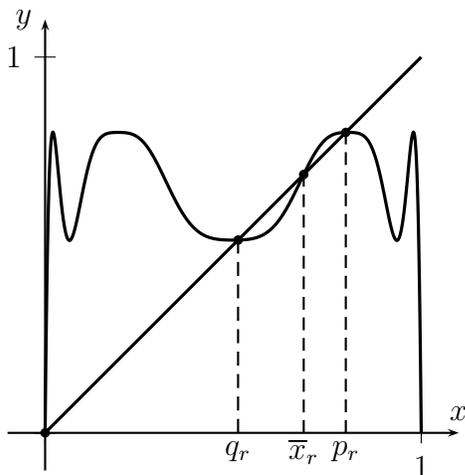
## 3.4 Cascade de doublements de période

### 3.4.1 Points de période 4

Considérons encore la fonction logistique  $f_r$ . Comme on l'a vu dans la section précédente, les points de période 2,  $p_r$  et  $q_r$  sont répulsifs pour  $r > 1 + \sqrt{6}$  et en  $r = 1 + \sqrt{6}$ , on a

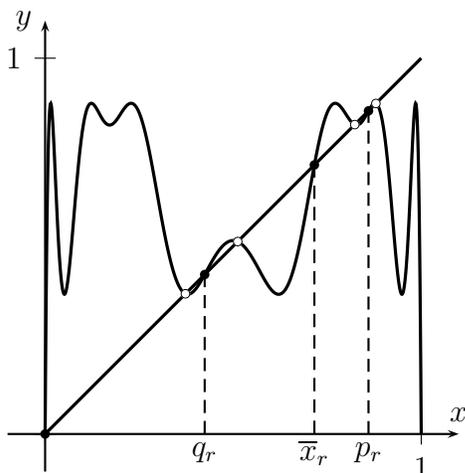
$$(f_r^2)'(p_r) = (f_r^2)'(q_r) = -1.$$

Ainsi, on peut s'attendre à une bifurcation doublement de période, pour la fonction  $f_r^2$  en  $r = 1 + \sqrt{6}$ . C'est le cas et on pourrait montrer que les points de période 4 qui bifurquent des points de période 2 en  $r = 1 + \sqrt{6}$  sont attractifs pour  $1 + \sqrt{6} < r < 3.54409\dots$



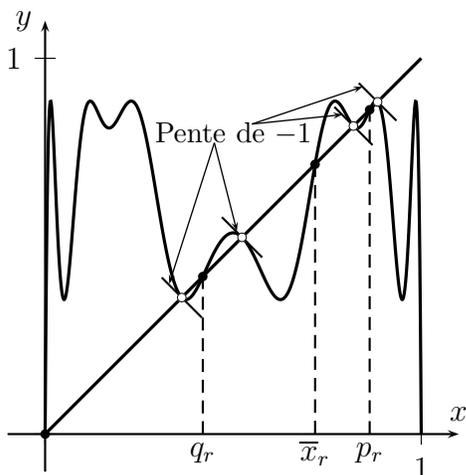
Pour  $3 < r < 1 + \sqrt{6}$  (ici  $r = 3.2$ ),  $f_r^4$  a quatre points fixes :

- 0 et  $\bar{x}_r$  (les points fixes de  $f_r$  qui sont répulsifs) ;
- $p_r$  et  $q_r$  (les points de période 2 qui sont attractifs).

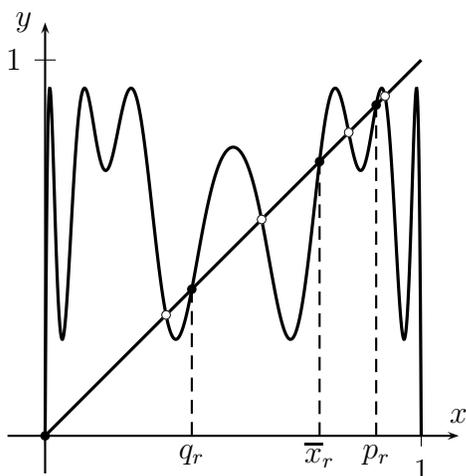


Pour  $1 + \sqrt{6} < r < 3.54409\dots$ ,  $f_r^4$  a huit points fixes :

- les points fixes 0 et  $\bar{x}_r$  de  $f_r$  (répulsifs) ;
- les points de période 2,  $p_r$  et  $q_r$  (répulsifs) ;
- quatre points attractifs de période 4 (indiqués par des cercles sur le graphe).

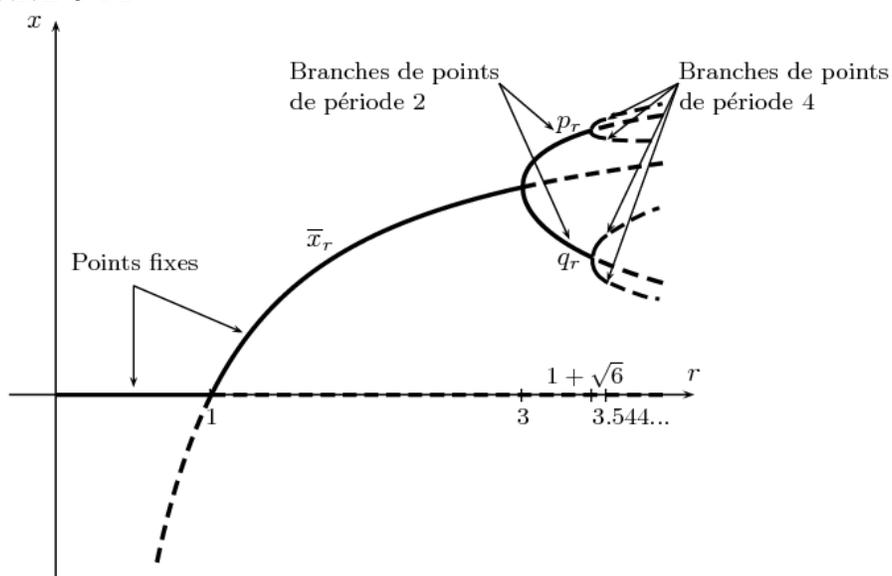


Pour  $r = 3.54409\dots$ , on a  $(f_r^4)'$  aux points de période 4 égale à  $-1$ . Ainsi, on peut s'attendre à une bifurcation doublement de période, pour la fonction  $f_r^4$ , en  $r = 3.54409$ .



Pour  $r > 3.54409\dots$  ( $r = 3.7$  sur la figure), tous les points fixes de  $f_r^4$ , y compris les quatre points de période 4, sont répulsifs.

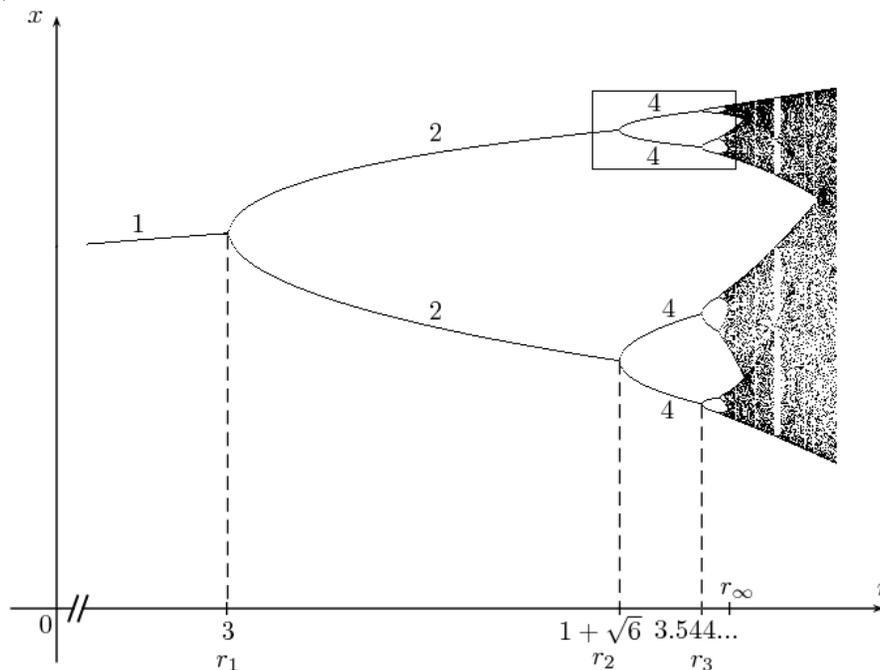
On peut, d'après ce qui précède, faire l'ajout suivant à la figure (diagramme de bifurcation) de la sous-section 3.4.1.



### 3.4.2 Obtention du diagramme de bifurcation par simulation

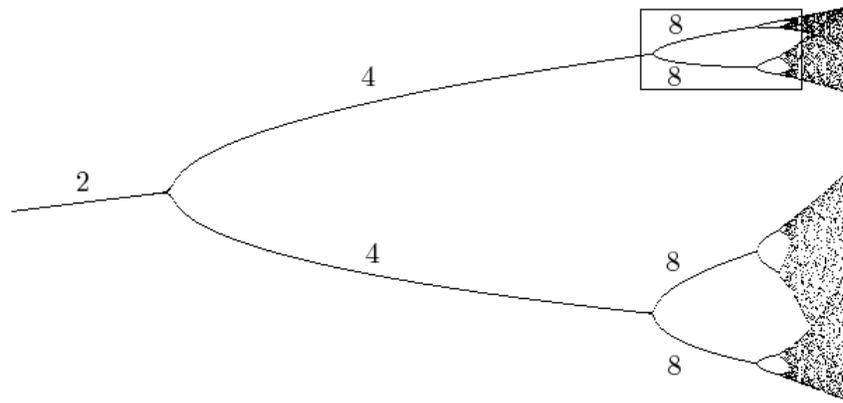
On peut obtenir cette figure par simulation numérique comme suit :

- On choisit  $N$  valeurs de  $r$  équidistantes (par exemple, pour  $0 \leq r \leq 4$  (en fait,  $N$  est le nombre de pixels utilisés pour représenter sur l'écran l'intervalle  $[0, 4]$ ).
- Pour chacune de ces valeurs de  $r$ , on itère  $f_r$  à partir d'un point  $x_0 \in ]0, 1[$  choisi au hasard.
- On trace les itérés  $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+\ell}$  (où e.g.  $k = 100$  et  $\ell = 1000$ ) à la verticale au-dessus de la valeur de  $r$  choisie.
- Ainsi, si  $k$  est assez grand (ce qui permet de ne pas tenir compte des itérés  $x_0, \dots, x_{k-1}$ , qui sont transitoires),  $x_k, \dots, x_{k+\ell}$  seront très près (en pratique, c'est-à-dire sur l'écran, égaux) des points fixes ou périodiques attractifs de  $f_r$ . On verra ainsi le diagramme de bifurcation, sauf que les parties en pointillés (correspondant aux points fixes ou périodiques répulsifs) ne seront pas obtenues.

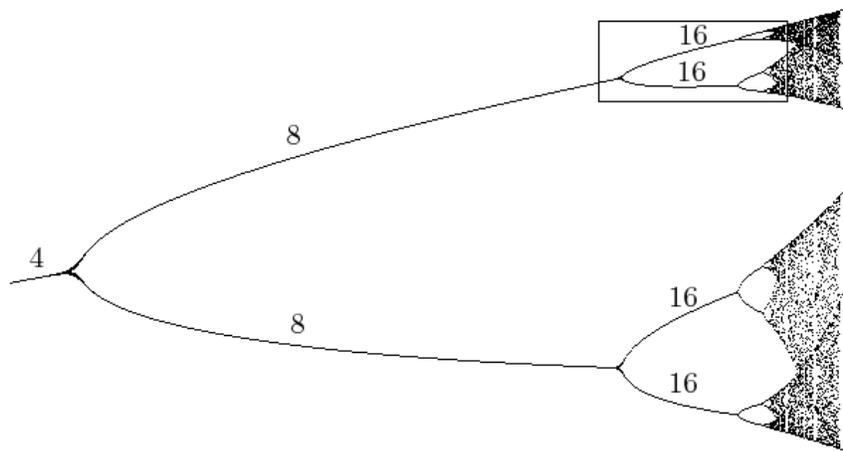


Les chiffres 1, 2, 4, 8 indiquent les branches de points 1, 2, 4 et 8-périodiques attractifs.

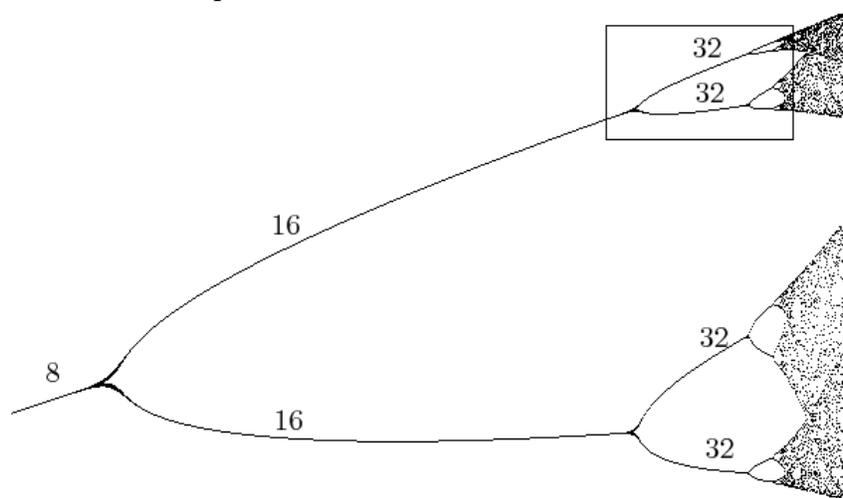
Un zoom sur la partie encadrée de la figure précédente donne



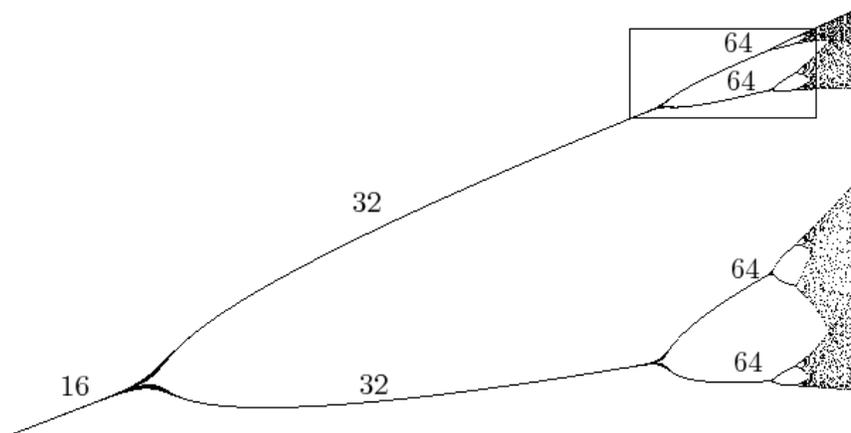
En agrandissant la partie encadrée, on obtient :



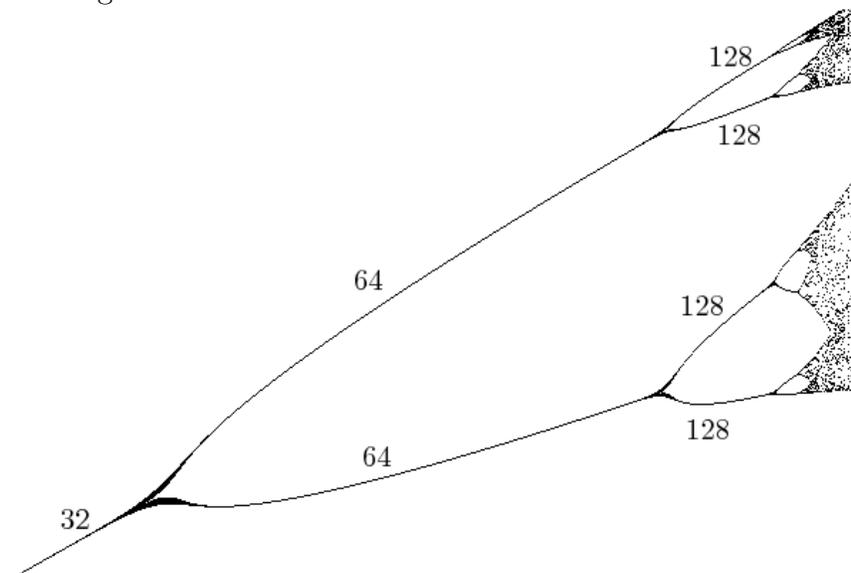
L'agrandissement de la partie encadrée donne



Un zoom de la partie encadrée précédente donne



et un dernier agrandissement



On pourrait continuer encore pour quelques étapes en augmentant la précision et le nombre d'itérés, mais on arriverait rapidement à la limite de l'ordinateur.

On peut montrer qu'il y a une infinité de telles bifurcations de doublement de période. Désignons par  $r_n$  la valeur de  $r$  pour laquelle il y a une bifurcation de doublement de période où l'on passe de  $2^{n-1}$  à  $2^n$ . On a déjà vu que

$$\begin{aligned} r_1 &= 3 \\ r_2 &= 1 + \sqrt{6} = 3.449\dots \\ r_3 &= 3.54409\dots \\ r_4 &= 3.5644\dots \\ r_5 &= 3.568759\dots \end{aligned}$$

On voit que cette suite  $\{r_n\}_{n \geq 1}$  semble converger, en fait, c'est le cas. On pourrait montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r_\infty = 3.569946\dots \quad (\text{voir fig. p. 105}).$$

Ainsi, la dynamique du système :

$$\begin{aligned} x_0 & \text{ donné} \\ x_{k+1} & = rx_k(1 - x_k) \end{aligned}$$

est complètement comprise pour  $0 < r < r_\infty$ .

### 3.4.3 Universalité dans les cascades de doublement de période

La suite  $\{r_n\}_{n \geq 1}$  converge quadratiquement, en fait, ici, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = \delta = 4.669 \dots$$

qu'on appelle la *constante de Feigenbaum*.

Cette constante est universelle dans le sens suivant : si une fonction  $g_\mu(x)$  dépendant d'un paramètre  $\mu$  a une telle cascade de bifurcations de doublement de période, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = \delta$$

où les  $\mu_n$  sont les valeurs du paramètre pour lesquelles on passe de la période  $2^{n-1}$  à  $2^n$ .

Les diagrammes de bifurcation des fonctions  $f_c(x) = x^2 + c$  et  $g_\mu(x) = \mu\pi \sin(\pi x)$  montrent effectivement une grande ressemblance avec celui de  $rx(1-x)$ .

Diagramme de bifurcation de  $f_c(x) = x^2 + c$

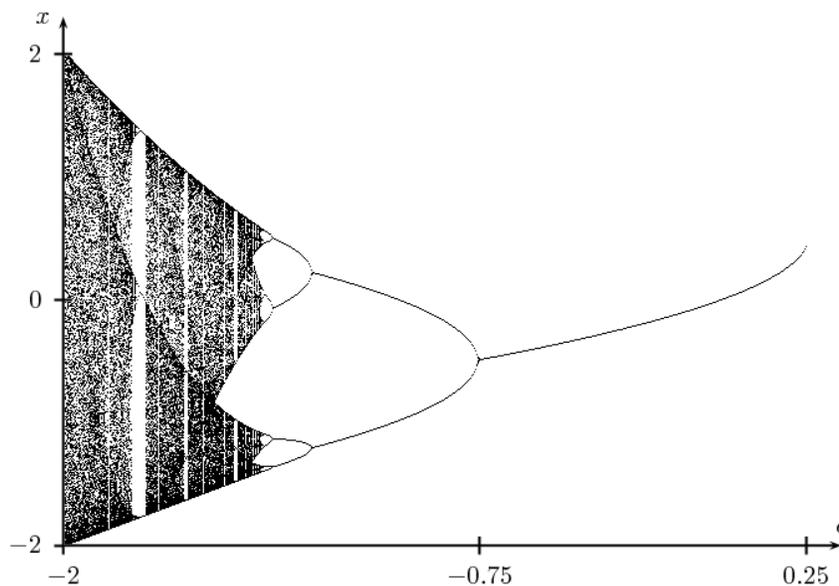
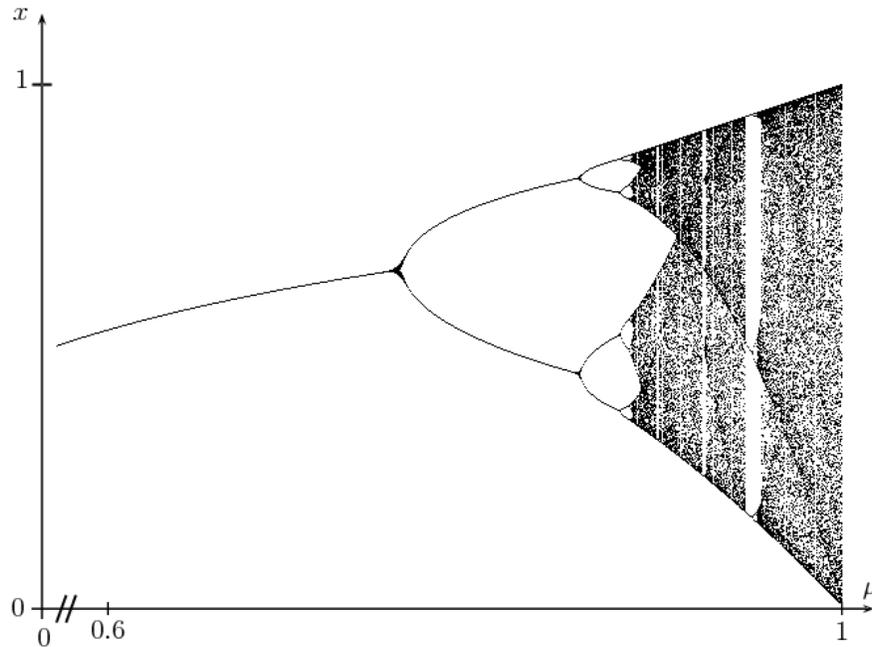


Diagramme de bifurcation de  $g_\mu(x) = \mu\pi \sin(\pi x)$



La fonction logistique  $f_r(x) = rx(1-x)$  et la fonction  $g_\mu(x) = \mu\pi \sin(\pi x)$  font partie de la classe de fonctions suivante, pour lesquelles la constante de Feigenbaum apparaît. Il s'agit de la classe des fonctions *unimodales* qui est composée des fonctions  $f$  vérifiant

- (i)  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^3$
- (ii)  $f$  a un maximum quadratique en un point  $x_m \in ]0, 1[$ , c'est-à-dire  $f'(x_m) = 0$  et  $f''(x_m) < 0$
- (iii)  $f$  est croissante sur  $[0, x_m[$  et décroissante sur  $]x_m, 1]$
- (iv) la dérivée Schwarzienne de  $f$  est négative, c'est-à-dire  $S_f(x) < 0 \quad \forall x \in [0, 1]$  où

$$S_f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

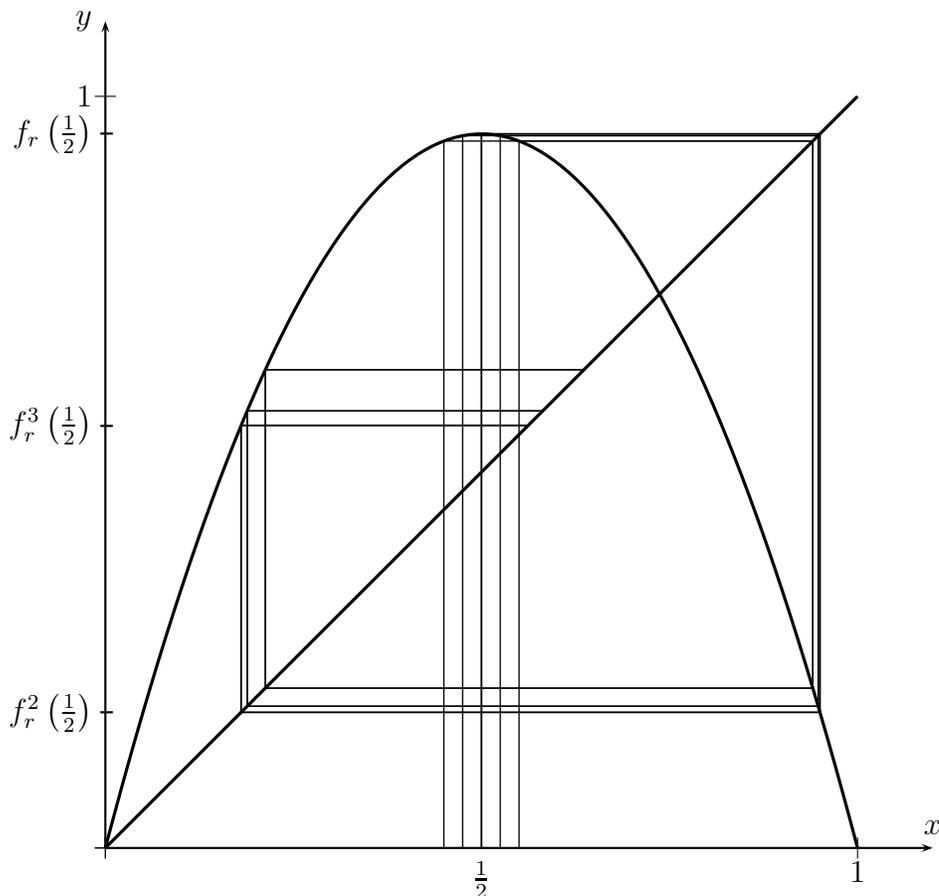
### 3.5 Fonction logistique : la dynamique lorsque $r > r_\infty$

Dans ce qui suit, on illustrera, surtout par des figures, la dynamique de  $f_r(x) = rx(1-x)$  pour  $r_\infty < r \leq 4$ . (On se limite à  $r \leq 4$ , car pour  $0 < r \leq 4$ ,  $f_r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ .)

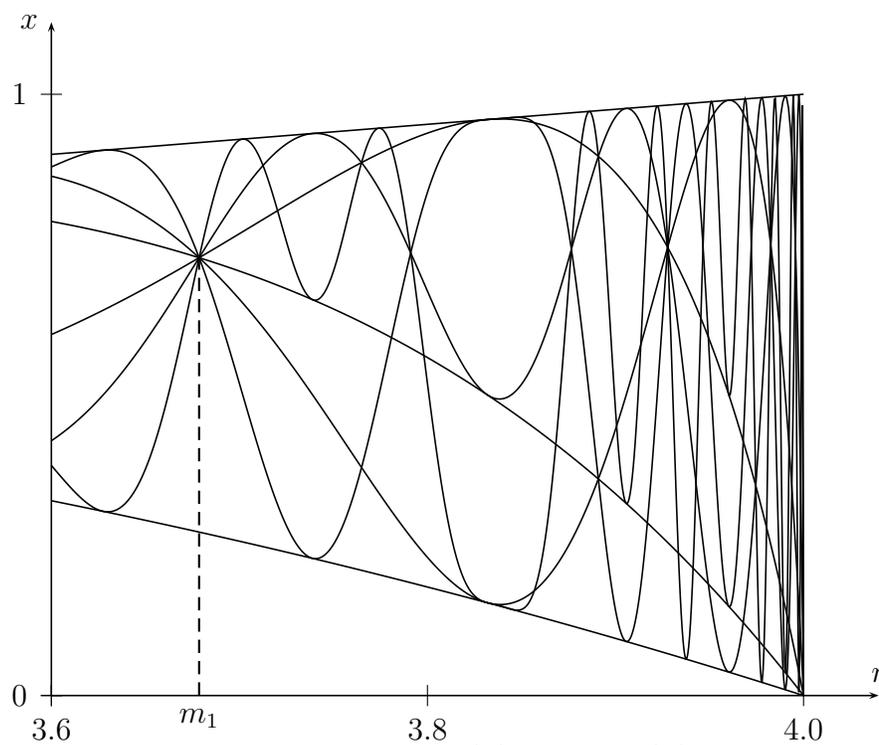
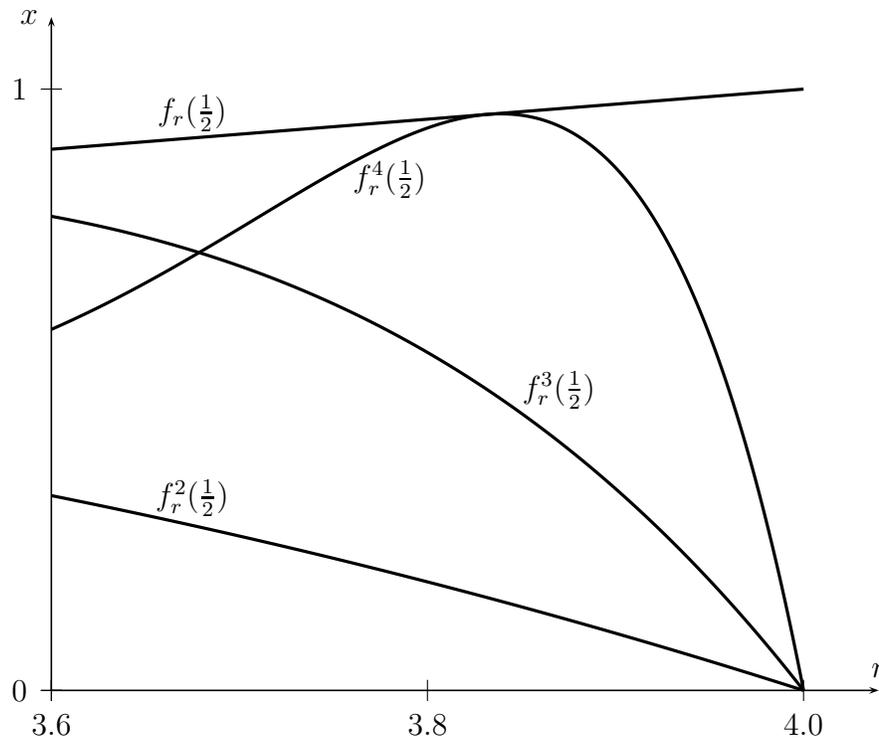
#### 3.5.1 Les zones foncées du diagramme de bifurcation

En examinant le diagramme de bifurcation de  $f_r(x) = rx(1-x)$ , on aperçoit des zones plus foncées (c'est-à-dire des zones plus souvent visitées par les itérés). On voit même des courbes dans le diagramme.

Pour tout  $r$ ,  $f_r(x) = rx(1-x)$  a un point critique en  $x = \frac{1}{2}$  (c'est-à-dire  $f'_r\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ); c'est le seul. La figure ci-dessous (ici  $r = 3.8$ ) montre qu'en itérant des points près du point critique  $\frac{1}{2}$ , les itérés ont tendance à se concentrer près des points  $f_r\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $f_r^2\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $f_r^3\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $\dots$



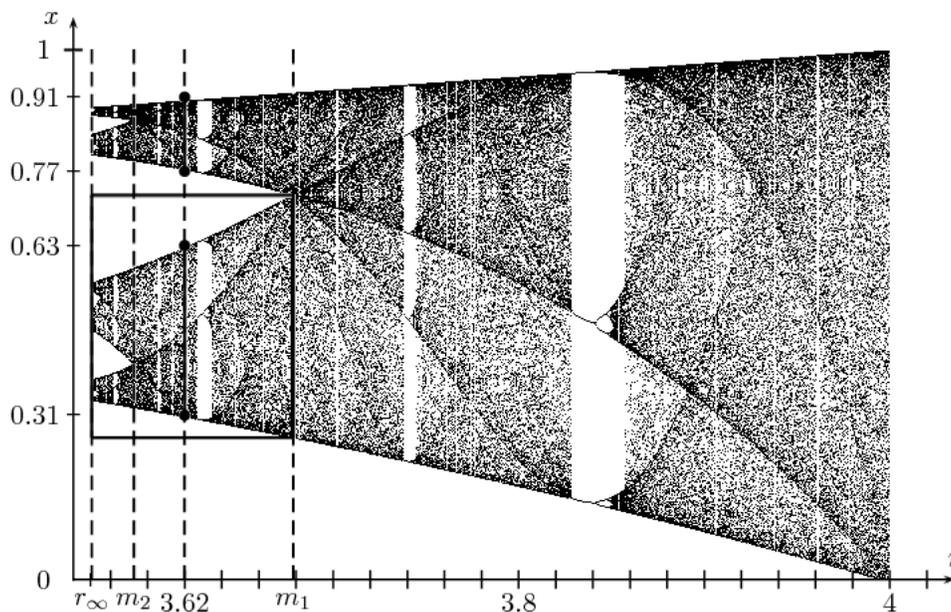
On a  $f_r\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{r}{4}$ ,  $f_r^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{r^2}{4} - \frac{r^3}{16}$ , etc. Ci-dessous, les courbes  $f_r\left(\frac{1}{2}\right), f_r^2\left(\frac{1}{2}\right), \dots$  pour  $3.6 \leq r \leq 4$ . Ces courbes sont tout à fait visibles dans le diagramme de bifurcation.



Les 8 courbes  $f_r\left(\frac{1}{2}\right), \dots, f_r^8\left(\frac{1}{2}\right)$

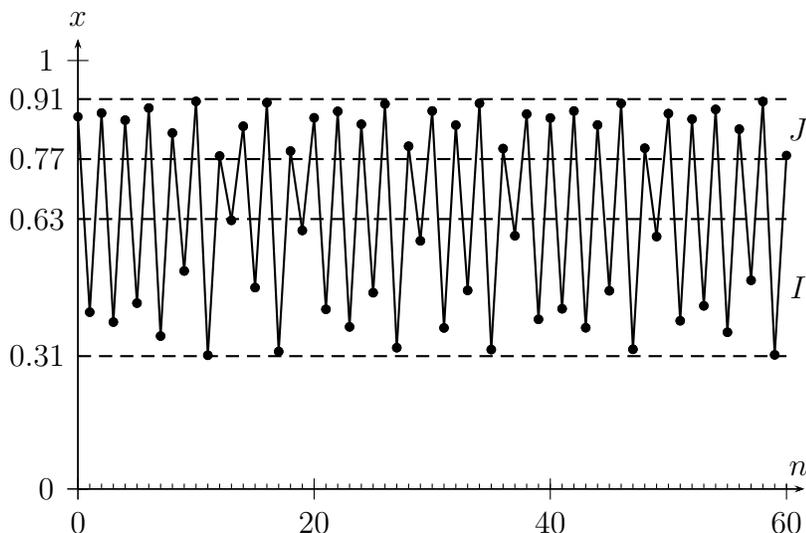
### 3.5.2 Doublement à l'infini de bandes «périodiques»

Si on fait varier  $r$  à rebours, on voit que le diagramme se sépare en deux bandes en  $r = m_1$ .

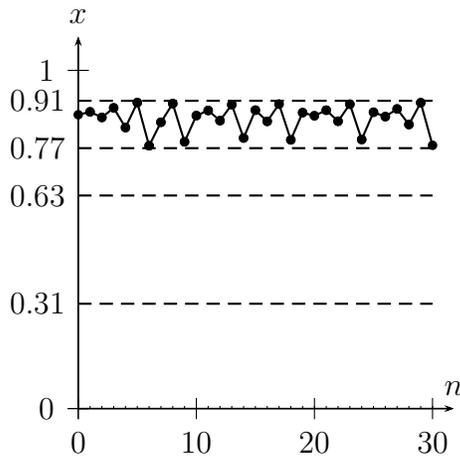


En fait, pour tout  $r$  compris entre  $m_2$  et  $m_1$ , il existe deux intervalles disjoints  $I$  et  $J$  (des bandes) inclus dans  $[0, 1]$  tels que, à partir d'un certain rang, toutes les itérées de  $f_r$  se retrouvent dans  $I \cup J$ .

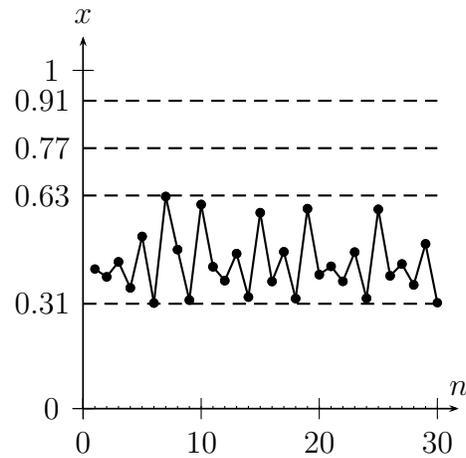
Pour  $r = 3.62$ , on a  $I = [0.31, 0.63]$  et  $J = [0.77, 0.91]$ . Observons maintenant le graphe des itérées de  $f_r(x)$ , avec  $r = 3.62$ , pour un certain  $x_0$  donné.



On voit que les itérés vont alternativement d'une bande à l'autre (de  $I$  à  $J$  et vice versa). Ce comportement explique l'expression «bandes périodiques».

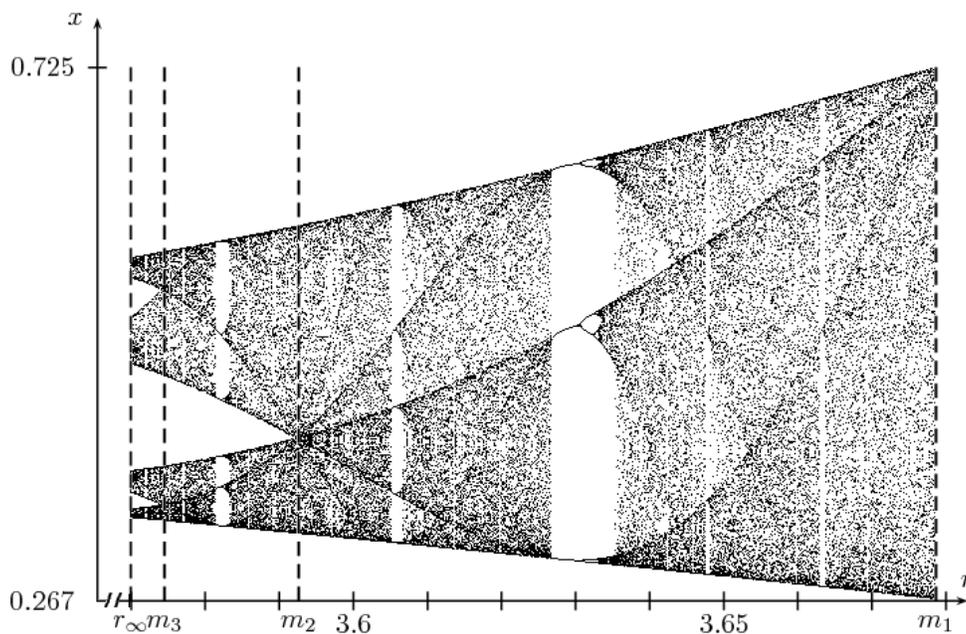


Les itérés d'indice pair  
 $x_0, f_r^2(x_0), \dots, f_r^{2n}(x_0), \dots$   
 sont tous dans la bande du haut.



Les itérés d'indice impair  
 $f_r(x_0), f_r^3(x_0), \dots, f_r^{2n+1}(x_0), \dots$   
 sont tous dans la bande du bas.

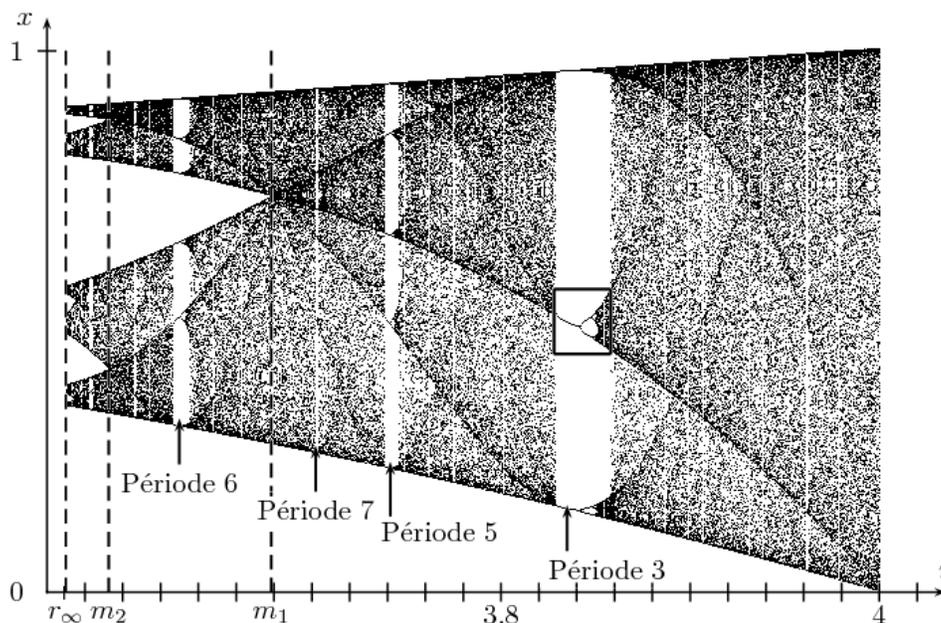
Regardons maintenant l'agrandissement de la partie encadrée du diagramme de bifurcation précédent. On peut constater qu'il y a un second doublement de bandes en  $m_2$  et un troisième en  $m_3$ .



En fait, il y a une infinité de tels dédoublements en  $m_1 > m_2 > m_3 > \dots > m_k > \dots$  avec  $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k = r_\infty$ .

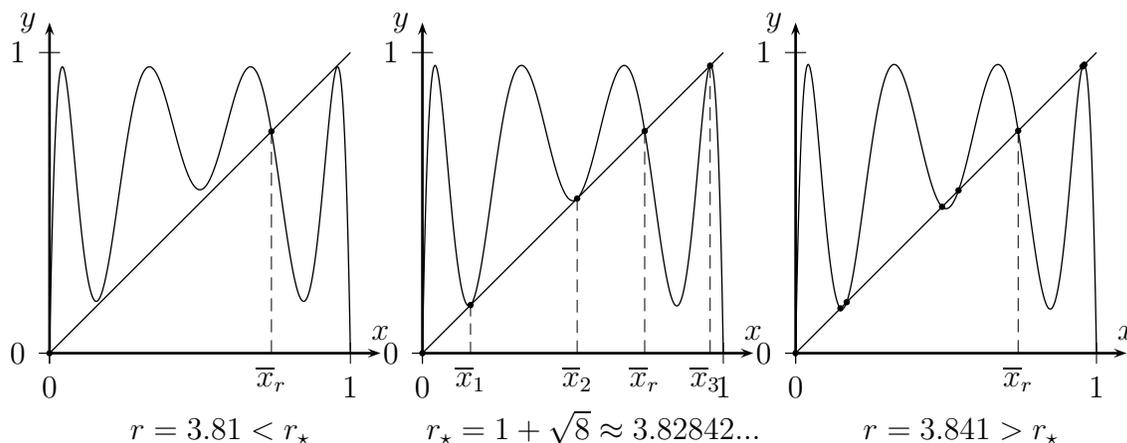
### 3.5.3 Fenêtres périodiques

Le diagramme de bifurcation (pour  $r_\infty \leq r \leq 4$ ) montre qu'il y a de nombreux intervalles de valeurs de  $r$  pour lesquelles on a un point périodique stable. On appelle ces intervalles des *fenêtres périodiques*.



On voit clairement les fenêtres de période 3, 5, 7 et 6. En fait, entre la fenêtre de période 3 et  $m_1$ , il y a toutes les fenêtres de période impaire 3, 5, 7, 9, ... Entre  $m_1$  et  $m_2$ , il y a toutes les fenêtres de période  $2 \times 3$ ,  $2 \times 5$ ,  $2 \times 7$ , ... Entre  $m_2$  et  $m_3$ , il y a les fenêtres de périodes  $4 \times 3$ ,  $4 \times 5$ ,  $4 \times 7$ , etc.

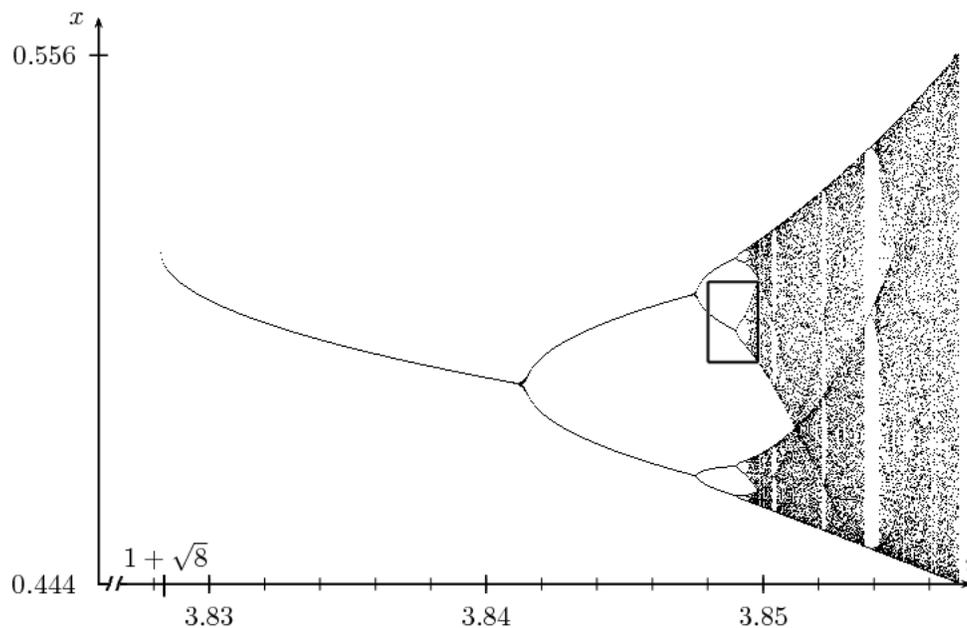
Nous nous intéresserons plus particulièrement à la fenêtre de période 3 (on a des phénomènes analogues dans les autres fenêtres).



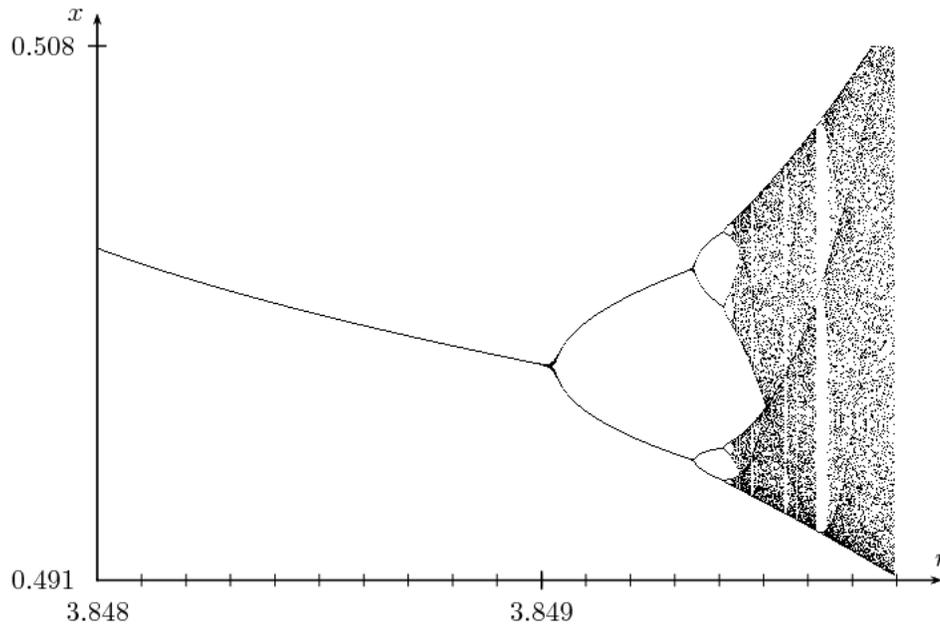
Lorsque  $r < 1 + \sqrt{8}$ ,  $f_r^3(x)$  a comme seuls points fixes 0 et  $\bar{x}_r$ , les points fixes de  $f_r(x)$ . Pour  $r = 1 + \sqrt{8}$ , on voit que  $f_r^3(x)$  a 3 nouveaux points fixes  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$  et  $\bar{x}_3$ . Notons qu'ici  $f_r(\bar{x}_1) = \bar{x}_2$ ,  $f_r(\bar{x}_2) = \bar{x}_3$  et  $f_r(\bar{x}_3) = \bar{x}_1$ . Donc, ces 3 points fixes de  $f_r^3(x)$  sont des points 3-périodiques purs de  $f_r(x)$ . Lorsque  $r > 1 + \sqrt{8}$ ,  $f_r^3(x)$  a 8 points fixes dont 0 et  $\bar{x}_r$ . À partir du graphique, on peut voir que les 6 autres points fixes se retrouvent par paire dans un voisinage d'un des  $\bar{x}_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Dans chaque paire de points fixes, l'un est attractif alors que l'autre est répulsif. On est donc en présence d'une bifurcation de type col-noeud pour  $f_r^3(x)$  en  $r = 1 + \sqrt{8}$ .

**Remarque.** Ici, il ne s'agit pas exactement d'une bifurcation de type col-noeud tel que défini initialement. En fait, en  $r = 1 + \sqrt{8}$ , il n'y a pas apparition d'un seul point fixe, mais bien de trois. Cependant, tel que mentionné précédemment, ces trois points appartiennent à un même cycle. Pour cette raison, on simplifie la terminologie et on se permet tout de même de parler de bifurcation de type col-noeud dans ce genre de situation.

À l'intérieur de la fenêtre de période 3, les agrandissements successifs de la partie encadrée de la figure de la page précédente montrent qu'on retrouve une suite de bifurcations et un diagramme analogues au diagramme entier.

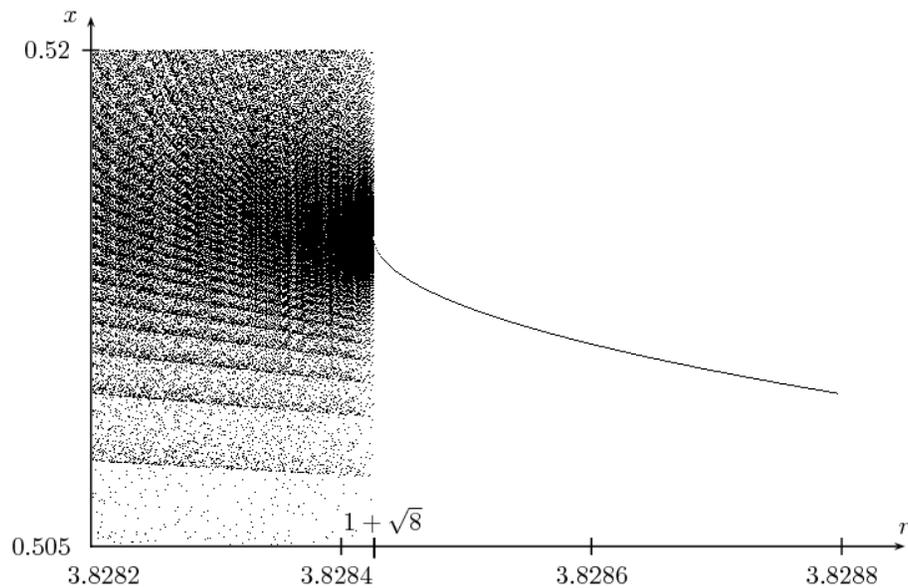


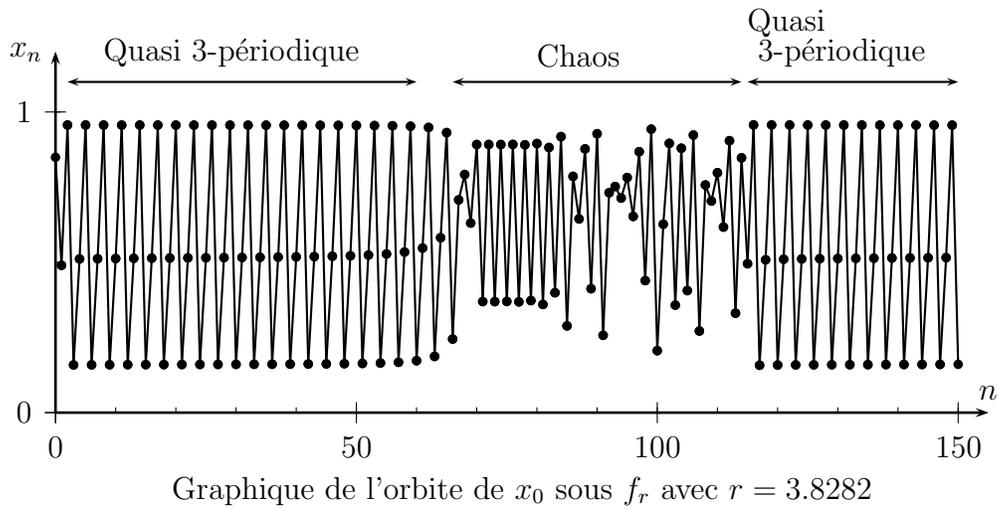
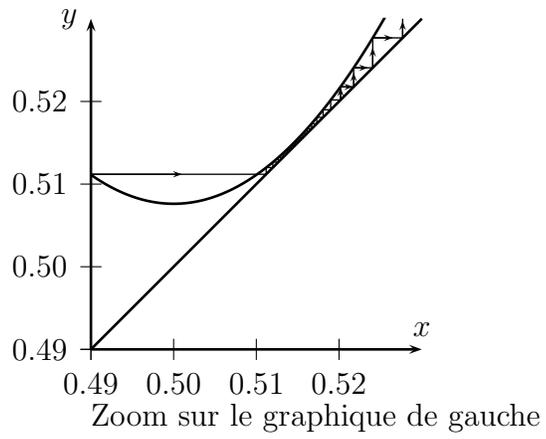
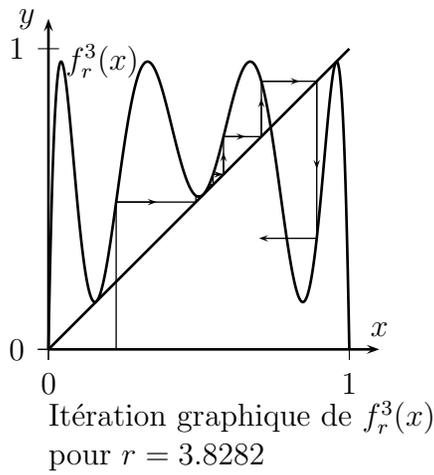
Un zoom sur la partie encadrée de la figure précédente donne :



### 3.5.4 Intermittence

Ce phénomène se produit en des valeurs de  $r$  juste avant une fenêtre périodique. Il est illustré ci-dessous pour  $r$  juste avant la fenêtre de période 3.







# Chapitre 4

## Chaos

### 4.1 Un résultat étonnant : le théorème de Sarkovskii

En 1975, T. Y. Li et J. Yorke publiaient, dans *American Math. Monthly*, 82, pp. 985-992, le résultat suivant.

**Théorème 4.1.1** (Li et Yorke). *Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et ayant un point de période 3. Alors  $f$  a des points de toutes les périodes.*

**Remarque.** C'était la première fois, dans l'article de Li et Yorke, que le terme chaos était utilisé dans un sens mathématique. Le titre de leur article est «Period 3 implies chaos». Notons que, dans la prochaine section, le terme chaos est utilisé, mais dans un sens un peu différent.

#### Exemples 4.1.2.

- a) Comme on l'a vu dans l'exemple 3.2.9, la fonction  $f$  définie par  $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$  a un point 3-périodique en  $x = 0$ . Ainsi, d'après le résultat précédent,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $f$  a au moins un point  $k$ -périodique (période minimale  $k$ ).
- b) La fonction logistique donnée par  $f_r(x) = rx(1-x)$  a un point 3-périodique lorsque  $1 + \sqrt{8} < r < 3.84\dots$ . Donc, pour ces valeurs de  $r$ ,  $f_r$  a des points  $k$ -périodiques pour tout  $k$ . Pourquoi ne voit-on pas ces points périodiques dans le diagramme de bifurcation ? (exercice)

Il s'est avéré que le résultat de Li et Yorke était un cas particulier d'un résultat général dû à un mathématicien ukrainien A. N. Sarkovskii qui avait publié, en 1964, son résultat. Son article, écrit en russe et dans une revue ukrainienne, était demeuré inconnu en occident. Ce n'est qu'après la publication du résultat de Li et Yorke que les mathématiciens occidentaux apprirent l'existence du résultat de Sarkovskii.

Pour énoncer ce dernier, nous allons d'abord ordonner les nombres naturels comme suit :

$$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \times 3 \triangleleft 2 \times 5 \triangleleft 2 \times 7 \triangleleft \dots \triangleleft 2^n \times 3 \triangleleft 2^n \times 5 \triangleleft 2^n \times 7 \triangleleft \dots$$

$$\dots \triangleleft 2^n \triangleleft \dots \triangleleft 2^3 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2 \triangleleft 1.$$

**Théorème 4.1.3** (Sarkovskii). *Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Supposons que  $f$  a un point de période  $n$ . Alors  $f$  a au moins un point de période  $m$  pour tout  $m$  tel que  $n \triangleleft m$ .*

**Remarques.**

1. La démonstration, un peu longue, est élémentaire. On pourra consulter la démonstration donnée par Huang dans *Mathematics Magazine*, avril 1992, pp. 91-102.
2. Le résultat est en quelque sorte optimal car pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $f$  a un point de période  $n$  et aucun point de période  $k$  pour tout  $k$  tel que  $k \triangleleft n$ .

### 4.1.1 Exercices

1. Est-ce qu'une fonction continue  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  peut avoir un point de période 48 sans avoir un point de période 56? Peut-elle avoir un point de période 176, mais pas de point de période 96?
2. Donner un exemple d'une fonction  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  qui a un point de période 3 et aucun autre point périodique.
3. Montrer que la fonction définie par  $f(x) = 3.2x(1 - x)$  n'a que des points de périodes 2 et 1 et pas d'autres points périodiques.
4. On considère une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Soient  $n > 3$  et  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  tels que  $f(x_i) = x_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  et  $f(x_n) = x_1$ . Montrer que  $f$  a des points de toutes les périodes.

## 4.2 Fonctions chaotiques

Il n'y a pas de définition universellement adoptée du chaos dans la communauté scientifique. Ici, nous prendrons la définition proposée par Robert Devaney (Boston University), qui semble avoir l'assentiment de la majorité des spécialistes de la théorie des systèmes dynamiques. Cette définition du chaos fait intervenir trois ingrédients : transitivité, sensibilité par rapport aux conditions initiales et densité des points périodiques. Donnons d'abord un sens précis à ces deux premières notions.

Soit  $f : I \rightarrow I$  où  $I = \mathbb{R}$  ou  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

**Définition 4.2.1.** On dit que  $f$  est *transitive* si pour toute paire d'intervalles ouverts  $J$  et  $K \subset I$ , il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f^n(J) \cap K \neq \emptyset$ .

**Remarques.**

1. La définition est équivalente à la suivante :  $f$  est transitive si pour toute paire de points  $x$  et  $y \in I$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $z \in ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$  et  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $f^n(z) \in ]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$ .
2. En d'autres mots, si  $f$  est transitive, pour toute paire de points dans  $I$ , il existe une orbite qui passe arbitrairement près des deux points.
3. Nous aurions pu définir la notion de transitivité pour une fonction  $f : D \rightarrow D$  où  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et, plus généralement,  $D$  un espace métrique (ou même un espace topologique).
4. Il est clair que si  $f$  a une orbite dense dans  $I$ , alors  $f$  est transitive. En fait, pour les cas considérés dans ce cours, la réciproque est aussi vraie.
5. Au lieu du terme transitive, on aurait pu utiliser *récurrente* ou *mélangeante*, mais ces termes ont des significations différentes dans d'autres contextes.

**Définition 4.2.2.** Nous dirons que  $f$  est *sensible par rapport aux conditions initiales* (s.r.c.i.) s'il existe un  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x \in I$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $y \in ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$  et  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$ .

**Remarque.** En d'autres mots, quel que soit le point de départ (la condition initiale)  $x$  choisi, on peut trouver un autre point de départ  $y$  aussi près de  $x$  que l'on veut, tel que les itérés de  $x$  et  $y$  s'éloignent éventuellement d'une distance supérieure à  $\delta$ . Notons également que  $\delta$  ne dépend pas du  $x$  choisi.

Nous pouvons maintenant définir le chaos pour un système dynamique discret donné par une fonction  $f : I \rightarrow I$ .

**Définition 4.2.3.** Nous disons que  $f$  est *chaotique* si

- (i)  $f$  est transitive;
- (ii)  $\text{Per}(f)$  l'ensemble des points périodiques de  $f$  est dense dans  $I$ ;

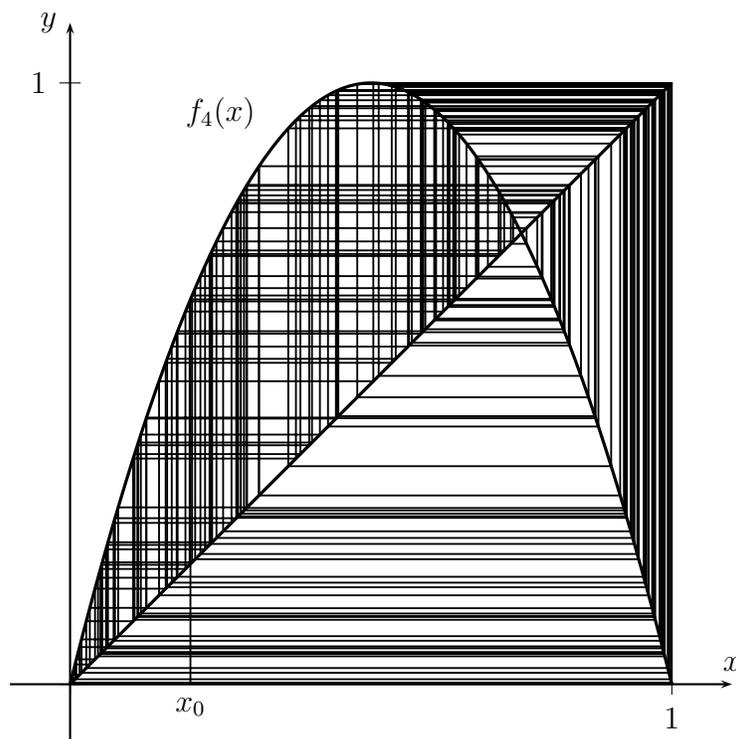
(iii)  $f$  est sensible par rapport aux conditions initiales.

**Remarque.** En fait, dans la plupart des cas qui nous intéressent, la condition (iii) est redondante, c'est-à-dire (i) et (ii) entraînent (iii). C'est un résultat récent dû à J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis et P. Stacey : On Devaney's definition of chaos, American Mathematical Monthly, 99, pp. 332-334 (1992).

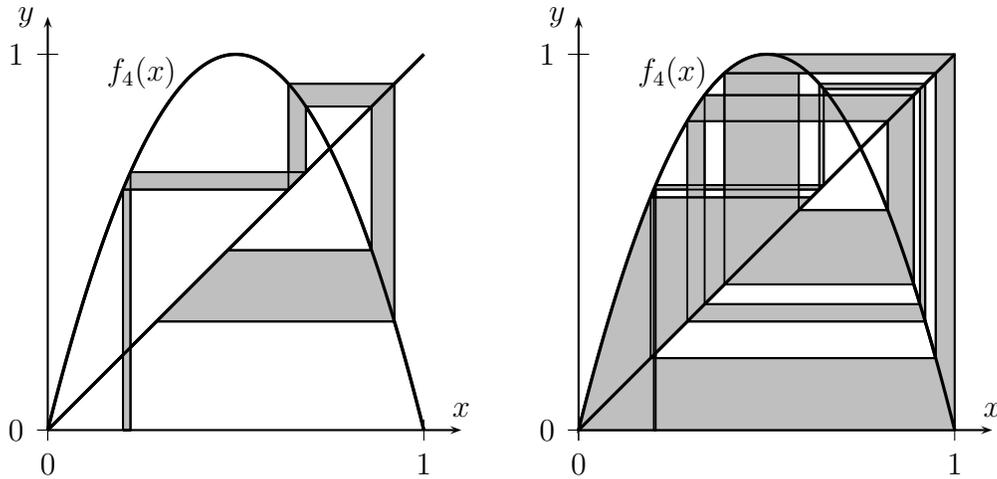
Dans la section qui suit, nous verrons en détail deux exemples de systèmes chaotiques, mais illustrerons d'abord pourquoi il est plausible de croire que, lorsque  $r = 4$ , l'application logistique  $f_r(x) = rx(1-x)$  est chaotique.

**L'application  $f_4(x) = 4x(1-x)$  est transitive et sensible par rapport aux conditions initiales**

La figure ci-dessous illustre la transitivité de  $f_4$ .



En itérant avec  $f_4$  graphiquement un petit intervalle (que l'on peut voir comme un ensemble de points de départ rapprochés), on peut illustrer la dépendance sensible par rapport aux valeurs initiales.



### 4.2.1 Exercices

#### 1. Dynamique symbolique (à deux symboles).

Soit  $\Sigma_2 = \{(s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_i = 0 \text{ ou } 1\}$  l'ensemble des suites dont les termes sont 0 ou 1. On définit sur  $\Sigma_2$  la distance  $d$  comme suit :

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

où  $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, \dots)$  et  $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ .

On définit également l'opérateur de décalage (shift)

$$\sigma : \Sigma_2 \longrightarrow \Sigma_2$$

par  $\sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, \dots)$ .

- Montrer que  $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) < 1/2^n \implies s_i = t_i$  pour  $i = 0, \dots, n$  et que  $s_i = t_i$  pour  $i = 0, \dots, n \implies d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \leq 1/2^n$ .
- Montrer que l'ensemble des points périodiques de  $\sigma$  est dense dans  $\Sigma_2$ .
- Montrer que  $\sigma$  a  $2^n$  points de période  $n$ .
- Montrer que l'ensemble des points éventuellement périodiques qui ne sont pas périodiques est dense dans  $\Sigma_2$ .
- Montrer que  $\sigma$  est transitive ( en fait, montrer qu'il existe un  $s^*$  dont l'orbite est dense dans  $\Sigma_2$ ).
- Montrer que  $\sigma$  est sensible par rapport aux conditions initiales.
- Montrer que  $\sigma$  est chaotique.

#### 2. Soit $\Gamma = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$ le cercle unité. Montrer que l'application

$$h : \Gamma \longrightarrow \Gamma$$

définie par  $h(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$ , est chaotique.

3. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \alpha x$  avec  $\alpha > 1$ . Montrer que  $f$  est sensible par rapport aux conditions initiales. Est-elle chaotique ? Pourquoi ?

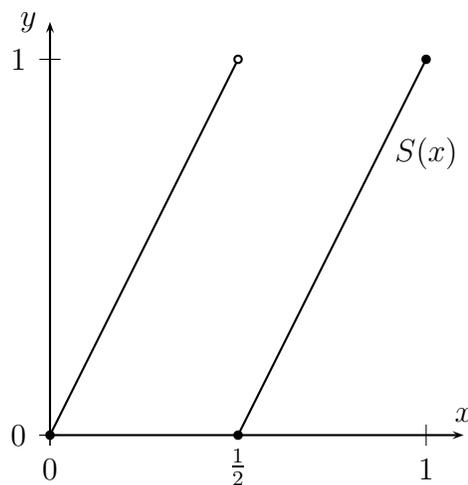
## 4.3 Deux applications chaotiques

### 4.3.1 Transformation du boulanger (ou transformation de doublement)

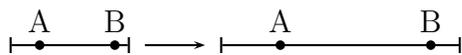
**Définition 4.3.1.** La *transformation du boulanger* est la fonction  $S : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  définie par

$$S(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire } S(x) = 2x \bmod 1$$

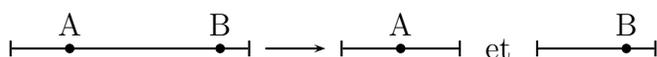
dont le graphe est



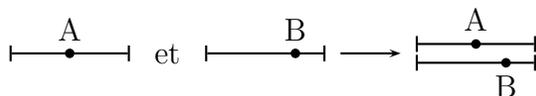
On peut la voir comme ceci :



On étire (avec un rouleau à pâte) pour doubler la longueur.



On coupe au milieu.



On place les morceaux l'un sur l'autre.

### Expression analytique de $S(x)$

Désignons par  $\text{Frac}(y)$  la partie fractionnaire d'un nombre, c'est-à-dire  $\text{Frac}(y) = y - [y]$  ou  $\text{Frac}(y) = y \bmod 1$  (où  $[y]$  désigne le plus grand entier  $\leq y$ ). Ainsi, on a  $S(x) = \text{Frac}(2x)$ .

#### Remarques.

1. Soit  $x_0 \in [0, 1]$ . On a que  $x_k = S^k(x_0) = \text{Frac}(2^k x_0)$ .
2. Soit  $x = 0.a_1 a_2 \dots a_k \dots$  (où  $a_i = 0$  ou  $1$ ), la représentation binaire de  $x$ , c'est-à-dire

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}.$$

On a que  $S(x) = 0.a_2 a_3 a_4 \dots$  et  $S^k(x) = 0.a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3} \dots$

3. Afin d'avoir une représentation unique des nombres sous forme binaire, on ne considérera que des représentations ne se terminant pas par des 1 qui se répètent à l'infini. Ainsi, pour représenter  $\frac{1}{2}$ , on choisira  $\frac{1}{2} = 0.1$  et non  $\frac{1}{2} = 0.0111\dots$

### $S$ est sensible par rapport aux valeurs initiales

Remarquons d'abord que si  $x = 0.a_1 a_2 \dots a_k \dots$  et  $y = 0.b_1 b_2 b_3 \dots b_k \dots$ , on a

$$|x - y| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{si } a_i = b_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

et inversement si  $|x - y| < \frac{1}{2^n}$ , on a  $a_i = b_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

Montrons maintenant la sensibilité par rapport aux valeurs initiales. En fait, nous allons montrer que quels que soient  $\varepsilon > 0$  et  $x \in [0, 1]$ , on peut trouver  $y$  tel que  $|x - y| \leq \varepsilon$  et  $|S^k(x) - S^k(y)| = \frac{1}{2}$  pour un certain  $k$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  et choisissons  $N$  tel que  $\frac{1}{2^N} \leq \varepsilon$ .

Soit  $x = 0.a_1 a_2 \dots a_{N-1} a_N a_{N+1} \dots \in [0, 1]$ .

Prenons  $y = 0.a_1 \dots a_{N-1} b_N a_{N+1} \dots$  où  $b_N = 1$  si  $a_N = 0$  et  $b_N = 0$  si  $a_N = 1$ . On obtient

$$S^{N-1}(x) = 0.a_N a_{N+1} \dots \quad \text{et} \quad S^{N-1}(y) = 0.b_N a_{N+1} \dots$$

d'où

$$|S^{N-1}(x) - S^{N-1}(y)| = \frac{1}{2}.$$

**L'ensemble des points périodiques de  $S$  est dense dans  $[0, 1]$**

Soit un  $x \in [0, 1]$  arbitraire et soit  $\varepsilon > 0$ . Il faut montrer qu'on peut trouver un point  $p \in [0, 1]$  périodique tel que  $|x - p| \leq \varepsilon$ . Soit  $N$  tel que  $\frac{1}{2^N} \leq \varepsilon$ . Supposons que

$$x = 0.a_1a_2 \dots a_Na_{N+1} \dots$$

Prenons

$$p = 0.a_1a_2 \dots a_Na_1a_2 \dots a_Na_1a_2 \dots a_N \dots$$

On a alors

$$|x - p| \leq \frac{1}{2^N}$$

et, d'autre part,  $p$  est périodique, car  $S^N(p) = 0.a_1 \dots a_Na_1 \dots = p$ .

**$S$  est transitive (mélangeante)**

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles dans  $[0, 1]$ . Il faut montrer qu'il existe  $k$  tel que  $S^k(I) \cap J \neq \emptyset$ .

Soit  $N$  tel que  $\frac{1}{2^{N-1}} < \text{longueur}(I)$  et soit  $x_m = 0.a_1a_2 \dots a_N \dots$  le point milieu de  $I$ . Soit  $y = 0.b_1b_2 \dots b_k \dots$  un point quelconque de  $J$ . Prenons  $x_0 = 0.a_1a_2 \dots a_Nb_1b_2b_3 \dots$ . On a alors  $|x_0 - x_m| \leq \frac{1}{2^N}$  et donc  $x_0 \in I$ . D'autre part, on a  $S^{N-1}(x_0) = 0.b_1b_2 \dots = y$ . En particulier,  $S^{N-1}(I) \cap J \neq \emptyset$ .

**Remarque.** En fait, cette propriété découle ici également du résultat : il existe un point  $\bar{x} \in [0, 1]$  dont l'orbite est dense dans  $[0, 1]$ . On prend

$$\bar{x} = 0. \underbrace{01}_{\text{singletons}} \underbrace{00\ 01\ 10\ 11}_{\text{couples}} \underbrace{000\ 001\ 010\ 011\ 100\ 110\ 111\ 101}_{\text{triplets}} \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{quadruplets}} \text{ etc.}$$

L'orbite de  $\bar{x}$  est dense dans  $[0, 1]$ .

**Conclusion**

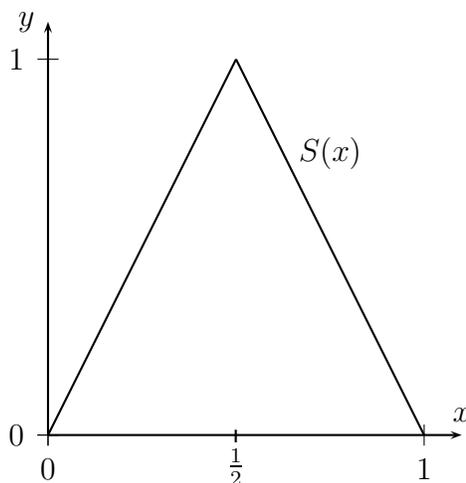
$S$  est chaotique.

### 4.3.2 La transformation tente

C'est la fonction  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  définie par

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

dont le graphe est



#### Expression de $T(x)$ en représentation binaire

Soit  $x \in [0, 1]$  et soit  $x = 0.a_1a_2 \dots a_n \dots$  sa représentation binaire.

#### Remarques.

1. On peut voir que

$$T(x) = \begin{cases} 0.a_2a_3a_4 \dots & \text{si } a_1 = 0 \\ 0.a_2^*a_3^*a_4^* \dots & \text{si } a_1 = 1 \end{cases}$$

où

$$a_i^* = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i = 0 \\ 0 & \text{si } a_i = 1. \end{cases}$$

2. On peut montrer que  $T^N(x) = T \circ S^{N-1}(x)$ .

#### L'ensemble des points périodiques de $T$ est dense dans $[0, 1]$

Soit  $p \in [0, 1]$  un point  $N$ -périodique de  $S$ . Montrons que  $q = T(p)$  est un point  $N$ -périodique de  $T$ . En effet,

$$T^N(q) = T^N(T(p)) = T^{N+1}(p) = TS^N(p) = T(p) = q.$$

Puisque l'ensemble des points périodiques de  $S$  est dense dans  $[0, 1]$ , on déduit (exercice) que l'ensemble des points périodiques de  $T$  est dense dans  $[0, 1]$ .

### $T$ est sensible par rapport aux conditions initiales

Montrons que quels que soient  $\varepsilon > 0$  et  $x_0 \in [0, 1]$ , on peut trouver  $y \in [0, 1]$  tel que  $|x_0 - y| \leq \varepsilon$  et  $|T^k(x_0) - T^k(y)| \geq \frac{1}{2}$  pour un certain  $k$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Prenons  $N$  tel que  $\frac{1}{2^N} \leq \varepsilon$  et soit  $x_0 = 0.a_1a_2\dots a_Na_{N+1}a_{N+2}\dots$  un point arbitraire de  $[0, 1]$ . On prend  $y = 0.a_1a_2\dots a_Na_{N+1}^*a_{N+2}\dots$ . Ainsi, on a  $|x_0 - y| \leq \frac{1}{2^N} \leq \varepsilon$ . Montrons que  $|T^N(x_0) - T^N(y)| = \frac{1}{2}$ .

**1<sup>er</sup> cas :** Supposons  $a_N = 0$ . On a alors

$$T^N(x_0) = T(S^{N-1}(x_0)) = T(0.a_Na_{N+1}\dots) = 0.a_{N+1}a_{N+2}\dots \text{ car } a_N = 0$$

et

$$T^N(y) = T(S^{N-1}(y)) = T(0.a_Na_{N+1}^*a_{N+2}\dots) = 0.a_{N+1}^*a_{N+2}\dots \text{ car } a_N = 0$$

d'où

$$|T^N(x_0) - T^N(y)| = \frac{1}{2}.$$

**2<sup>e</sup> cas :** Supposons  $a_N = 1$ . On a alors

$$\begin{aligned} T^N(x_0) &= T(S^{N-1}(x_0)) = T(0.a_Na_{N+1}a_{N+2}\dots) = 0.a_{N+1}^*a_{N+2}^* \text{ car } a_N = 1 \\ T^N(y) &= T(S^{N-1}(y)) = T(0.a_Na_{N+1}^*a_{N+2}\dots) = 0.a_{N+1}a_{N+2}^* \dots \end{aligned}$$

d'où

$$|T^N(x_0) - T^N(y)| = \frac{1}{2}.$$

### $T$ est transitive

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles dans  $[0, 1]$ . Il faut montrer qu'il existe  $k$  tel que  $T^k(I) \cap J \neq \emptyset$ . Soit  $N$  tel que  $\frac{1}{2^{N-1}} \leq \text{longueur}(I)$  et  $\frac{1}{2^{N-1}} \leq \text{longueur}(J)$ . Soient  $x_m = 0.a_1a_2\dots a_Na_{N+1}\dots$  et  $y_m = 0.b_1\dots b_Nb_{N+1}\dots$  les points milieux de  $I$  et  $J$ . Alors  $x_0 = 0.a_1\dots a_Nb_1\dots b_N \in I$  car  $|x_m - x_0| \leq \frac{1}{2^N}$  et  $\frac{1}{2^{N-1}} \leq \text{longueur}(I)$ , de même  $y_0 = 0.a_1\dots a_Nb_1^*\dots b_N^* \in I$ . Montrons que  $T^N(x_0) \in J$  si  $a_N = 0$  et  $T^N(y_0) \in J$  si  $a_N = 1$ .

**1<sup>er</sup> cas** : Supposons  $a_N = 0$ . On a

$$T^N(x_0) = T(S^{N-1}(x_0)) = T(0.a_N b_1 \dots b_N) = 0.b_1 \dots b_N \quad \text{car } a_N = 0$$

d'où

$$T^N(x_0) \in J \quad \text{car } |y_m - T^N(x_0)| \leq \frac{1}{2^N}.$$

**2<sup>e</sup> cas** : Supposons  $a_N = 1$ . On a

$$\begin{aligned} T^N(y_0) = T(S^{N-1}(y_0)) &= T(0.a_N b_1^* b_2^* \dots b_N^*) \\ &= 0.b_1 b_2 \dots b_N \end{aligned}$$

d'où

$$T^N(y_0) \in J \quad \text{car } |y_m - T^N(y_0)| \leq \frac{1}{2^N}.$$

## Conclusion

$T$  est chaotique.

### 4.3.3 L'application logistique $f_4(x) = 4x(1-x)$ est chaotique

Pour simplifier les notations, posons  $f(x) = 4x(1-x)$ , c'est-à-dire l'application logistique  $f_r(x) = rx(1-x)$  lorsque  $r = 4$ .

$f$  est conjuguée à la transformation tente, c'est-à-dire il existe une bijection bicontinue  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  telle que  $f \circ h = h \circ T$ , c'est-à-dire  $f(h(x)) = h(T(x)) \quad \forall x \in [0, 1]$ . En fait, ici, on peut prendre  $h(x) = \sin^2\left(\pi \frac{x}{2}\right)$ . On obtient (exercice)

$$\boxed{f^k \circ h = h \circ T^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$T$  étant chaotique, on peut en déduire (exercice) que  $f$  est chaotique.

### 4.3.4 Exercices

1. Montrer que si  $x_0 \in [0, 1]$  est donné, on a

$$x_k = S^k(x_0) = \text{Frac}(2^k x_0).$$

2. Soit  $x \in [0, 1]$  et soit  $x = 0.a_1a_2 \dots a_k \dots$  (où  $a_i = 0$  ou  $1$ ), sa représentation binaire, c'est-à-dire  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$ . Ainsi

$$2x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i-1}} = a.a_2a_3a_4 \dots \quad \text{d'où } \text{Frac}(2x) = 0.a_2a_3a_4 \dots$$

et, en particulier

$$S(x) = 0.a_2a_3a_4 \dots$$

En déduire que  $S^k(x) = 0.a_{k+1}a_{k+2}a_{k+3} \dots$

3. Soit  $x = 0.a_1a_2 \dots a_k \dots$  et  $y = 0.b_1b_2b_3 \dots b_k \dots$ . Montrer que

$$|x - y| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{si et seulement si } a_i = b_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

4. Montrer que la transformation du boulanger  $S$  est conjuguée au décalage  $\sigma$  (voir exercice 1 à la page 123).
5. Soit  $x \in [0, 1]$  et soit  $x = 0.a_1a_2 \dots a_n \dots$  sa représentation binaire. Montrer que

a)

$$T^2(x) = T \circ T(x) = T \circ S(x)$$

et, plus généralement,

$$T^N(x) = T \circ S^{N-1}(x).$$

b)

$$T(x) = \begin{cases} 0.a_2a_3a_4 \dots & \text{si } a_1 = 0 \\ 0.a_2^*a_3^*a_4^* \dots & \text{si } a_1 = 1 \end{cases}$$

où

$$a_i^* = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i = 0 \\ 0 & \text{si } a_i = 1 \end{cases}$$

6. Montrer que la fonction  $f(x) = 4x(1 - x)$  est chaotique. ( Vérifier les détails de la sous-section 4.3.3.)
7. Montrer que la fonction  $f(x) = x^2 - 2$  est chaotique.



# Chapitre 5

## L'ensemble de Mandelbrot

### 5.1 Itération de fonctions

L'ensemble de Mandelbrot, noté  $\mathcal{M}$ , est généré grâce à un processus d'itération de fonctions dans le plan complexe. Pour l'étude des systèmes dynamiques discrets dans  $\mathbb{C}$ , on emploie des notations similaires à celles utilisées dans le cas réel.

Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , on considère le système dynamique discret (équation aux différences) :

$$\begin{cases} z_0 \in \mathbb{C} \text{ donné} \\ \text{pour } k \in \mathbb{N}, z_{k+1} = f(z_k) \end{cases}$$

c'est-à-dire pour un point de départ  $z_0$  donné, on engendre la suite  $z_0, z_1, z_2, \dots$  comme suit :

$$\begin{aligned} z_1 &= f(z_0) \\ z_2 &= f(z_1) = f \circ f(z_0) = f^2(z_0) \\ &\vdots \\ z_n &= f(z_{n-1}) = f^n(z_0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

où on rappelle la notation  $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} = f^n$ .

Pour la stabilité des points fixes (et périodiques), des fonctions holomorphes  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , on a des résultats analogues à ceux des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ .

**Théorème 5.1.1.** Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe ayant un point fixe  $z_*$ .

Si  $|f'(z_*)| < 1$ ,  $z_*$  est attractif, c'est-à-dire il existe un voisinage  $U$  de  $z_*$  tel que pour tout  $z \in U$ , on a  $f^n(z) \rightarrow z_*$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Si  $|f'(z_*)| > 1$ ,  $z_*$  est répulsif, c'est-à-dire il existe un voisinage  $U$  de  $z_*$  tel que pour tout  $z \in U$ ,  $z \neq z_*$ , il existe un entier  $k > 0$  tel que  $f^k(z) \notin U$ .

**Remarques.**

1. Si  $|f'(z_*)| = 1$ , on ne peut rien conclure.
2. Pour les points périodiques, on a un résultat analogue :  
Soit  $z_*$  un point de période  $p$ , c'est-à-dire  $z_*$  est un point fixe de  $f^p$ . Alors
  - a) L'orbite de  $z_*$ ,  $\{z_*, f(z_*), \dots, f^{p-1}(z_*)\}$  est attractive (on dit aussi que  $z_*$  est un point périodique attractif) si  $|(f^p)'(z_*)| < 1$ .
  - b)  $z_*$  est répulsif si  $|(f^p)'(z_*)| > 1$ .

On utilisera la terminologie suivante :

Soit  $z_*$  un point  $p$ -périodique de  $f$ .

- On dit que  $z_*$  est *attractif* si  $|(f^p)'(z_*)| < 1$ .
- On dit que  $z_*$  est *super-attractif* si  $|(f^p)'(z_*)| = 0$ .
- On dit que  $z_*$  est *répulsif* si  $|(f^p)'(z_*)| > 1$ .
- On dit que  $z_*$  est *neutre* si  $|(f^p)'(z_*)| = 1$ .

## 5.2 Définition de $\mathcal{M}$

Pour faire l'étude de l'ensemble de Mandelbrot, on s'intéressera à la famille des polynômes de degré 2 de la forme  $Q_c(z) = z^2 + c$  où  $c \in \mathbb{C}$ . En fait, cette famille de fonctions est plus générale qu'elle en a l'air ! En effet, tout polynôme  $P(z) = az^2 + 2bz + d$  de degré 2 est conjugué à  $Q_c$  pour une certaine valeur de  $c$ , car

$$Q_c \circ h = h \circ P$$

où  $h(z) = az + b$  avec  $c = ad + b - b^2$ . Ainsi, si l'on s'intéresse à l'itération de polynômes de degré 2, il suffit de s'intéresser aux polynômes  $Q_c$ .

Voici une première définition de l'ensemble de Mandelbrot.

**Définition 5.2.1.** L'ensemble de Mandelbrot pour la famille quadratique est l'ensemble des paramètres  $c$  pour lesquelles l'orbite de 0 sous  $Q_c$  est bornée.

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \{c \in \mathbb{C} : |Q_c^n(0)| \not\rightarrow \infty, n \rightarrow \infty\} \\ \mathcal{M} &= \left\{c \in \mathbb{C} : c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots \not\rightarrow \infty\right\}\end{aligned}$$

**Remarques.**

1. A priori, on peut se demander pour quelles raisons l'orbite du point 0 est plus intéressante que celle d'un autre. Nous fournirons plus tard des explications afin de justifier le rôle particulier que joue le point 0 dans la dynamique de la famille quadratique.
2. Notons que la définition même de l'ensemble de Mandelbrot nous fournit un algorithme nous permettant de le déterminer à l'aide d'un ordinateur. Par ailleurs, le prochain corollaire nous est très utile lorsque vient le temps de borner l'ensemble de Mandelbrot dans le plan complexe.

**Proposition 5.2.2.** Supposons  $|z| \geq |c| > 2$ . Alors  $Q_c^n(z) \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}Q_c(z) = z^2 + c, \text{ d'où } |Q_c(z)| &\geq |z|^2 - |c| \\ &\geq |z|^2 - |z| \quad \text{car } |z| \geq |c| \\ &\geq |z|(|z| - 1)\end{aligned}$$

Ayant  $|z| > 2$ , il existe un  $\alpha > 1$  tel que  $|z| - 1 > \alpha$ , d'où

$$|Q_c(z)| > \alpha|z|.$$

En particulier,

$$|Q_c(z)| > |z| \geq |c| > 2.$$

En appliquant le même argument à  $Q_c(z)$ , on obtient

$$|Q_c^2(z)| > \alpha^2|z|$$

et, par récurrence, on obtiendrait

$$|Q_c^n(z)| > \alpha^n|z| \quad \forall n$$

d'où

$$|Q_c^n(z)| \rightarrow \infty \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

□

**Corollaire 5.2.3.** Supposons  $|c| > 2$ . Alors  $Q_c^n(0) \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire l'orbite de 0 n'est pas bornée. En particulier, on a que  $\mathcal{M} \subset \{c \in \mathbb{C} : |c| < 2\}$ .

*Démonstration.* Posons  $z = Q_c(0) = c$ . Ayant  $|z| = |c| > 2$ , on déduit de la proposition précédente que

$$Q_c^n(z) = Q_c^{n+1}(0) \rightarrow \infty \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

□

## 5.3 Ensembles de Julia

Fixons maintenant une valeur de  $c$  et étudions le comportement dynamique de chaque valeur de départ possible  $z_0 \in \mathbb{C}$ . L'ensemble des valeurs de départ dont l'orbite est bornée sous itération de  $Q_c$  forme l'ensemble rempli de Julia de  $Q_c$ , que l'on note  $K(Q_c)$ . Plus formellement, on a les définitions suivantes.

**Définition 5.3.1.** Soit  $c \in \mathbb{C}$ . L'ensemble rempli de Julia de  $Q_c$  est

$$K(Q_c) = \{z : |Q_c^n(z)| \not\rightarrow \infty, n \rightarrow \infty\}.$$

L'ensemble de Julia de  $Q_c$ , noté  $J(Q_c)$ , est la frontière de cet ensemble. Le complément de l'ensemble de Julia est l'ensemble de Fatou  $F(Q_c)$ .

**Remarque.** À l'exception des cas où  $c = -2$  et  $c = 0$ , l'ensemble de Julia de  $Q_c$  pour un  $c$  donné est un fractal.

**Exemple 5.3.2.** Prenons  $Q_0(z) = z^2$ . Alors si  $z_0 = re^{i\theta}$ , on a que  $z_n = r^{2^n} e^{i2^n\theta} = Q_0^n(z_0)$ . Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \checkmark \quad & z_n \rightarrow 0 \text{ si } r < 1 \\ \checkmark \quad & |z_n| \rightarrow \infty \text{ si } r > 1 \\ \checkmark \quad & |z_n| = 1 \quad \forall n \text{ si } r = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, on a partitionné  $\mathbb{C}$  en trois régions :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{z : |z| < 1\} \\ E_2 &= \{z : |z| = 1\} \\ E_3 &= \{z : |z| > 1\} \end{aligned}$$

qui se distinguent par le comportement de l'itération de  $Q_0$  sur celles-ci.

De plus, on a  $K(Q_0) = \{z : |z| \leq 1\}$  (le disque unité fermé),  $J(Q_0) = \{z : |z| = 1\}$  (le cercle unité) et  $F(Q_0) = \{z : |z| \neq 1\}$ .

En général, on ne peut pas trouver analytiquement l'ensemble de Julia associé à  $Q_c$ . On doit le déterminer numériquement à l'aide d'un ordinateur. Tout comme lorsqu'on programme l'algorithme pour déterminer l'ensemble de Mandelbrot, on a besoin d'un critère nous permettant de déterminer à partir de quel moment l'orbite d'un point donné va tendre vers l'infini assurément. Le corollaire suivant, qui découle de la proposition 5.2.2, nous fournit ce critère.

**Corollaire 5.3.3.** *Soit  $c \in \mathbb{C}$ . Supposons  $|z| > \max\{|c|, 2\}$ , alors  $Q_c^n(z) \rightarrow \infty$  si  $n \rightarrow \infty$ . En particulier,  $J(Q_c) \subset K(Q_c) \subset \{z : |z| \leq \max(|c|, 2)\}$ .*

*Démonstration.* Si  $|c| > 2$ , alors on sait, d'après la proposition 5.2.2, que  $Q_c^n(z) \rightarrow \infty$  si  $n \rightarrow \infty$ .

Supposons  $|c| \leq 2$ . Puisque  $|z| > \max\{|c|, 2\} = 2$ , on a vu, dans la démonstration de la proposition 5.2.2, que

$$|Q_c^n(z)| > \alpha^n |z| \quad \forall n \quad \text{où } \alpha > 1$$

d'où

$$Q_c^n(z) \rightarrow \infty \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

□

Ce dernier résultat nous permet d'obtenir «l'algorithme» suivant pour déterminer l'ensemble rempli de Julia  $K(Q_c)$  :

- On sait que  $K(Q_c) \subset$  disque de rayon  $\max\{|c|, 2\}$ .
- Choisissons  $N$  un nombre maximum d'itérations.
- Pour chaque point  $z$  d'une grille recouvrant le disque de rayon  $\max\{|c|, 2\}$ , calculer  $Q_c^n(z)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .
  - Si  $|Q_c^i(z)| > \max\{|c|, 2\}$  pour un  $i \leq N$ , arrêter l'itération et laisser le point  $z$  en blanc (on sait que  $z \notin K(Q_c)$ ).
  - Si  $|Q_c^i(z)| \leq \max\{|c|, 2\}$ ,  $\forall i \leq N$ , colorer le point  $z$  en noir (car, dans ce cas, si  $N$  est assez grand, il y a tout lieu de croire que  $z \in K(Q_c)$ ).

L'ensemble des points noircis donnera une approximation de  $K(Q_c)$ .

## 5.4 Point critique

Les points critiques d'une fonction, ces points en lesquels la dérivée de la fonction s'annule, ont une grande influence sur le comportement dynamique de la fonction. Rappelez-vous, dans le cas réel, ce qui occasionnait les zones plus foncées à l'intérieur d'un diagramme de bifurcation. La présence de points critiques, bien sûr ! Dans le cas complexe, les points critiques jouent un rôle déterminant. Étant donné que 0 est le point critique de la famille quadratique  $Q_c(z) = z^2 + c$ , il semble naturel de vouloir étudier son comportement. C'est justement ce que nous avons entrepris jusqu'à maintenant grâce à l'étude de l'ensemble de Mandelbrot et des ensembles de Julia.

Nous présentons ici quelques résultats fondamentaux que vous avez sans doute conjecturés au cours de laboratoires. Les démonstrations de ces résultats ne seront pas présentées ici puisqu'elles requièrent des connaissances de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

**Définition 5.4.1.** Soit  $z_* \in \mathbb{C}$  un point périodique attractif de  $Q_c$ . Considérons son orbite  $\gamma = \{z_*, Q_c(z_*), \dots, Q_c^{p-1}(z_*)\}$ . Le *bassin d'attraction* de  $\gamma$  (on dit aussi de  $z_*$ ) est

$$A(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} : d(Q_c^n(z), \gamma) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty\}.$$

Le *bassin immédiat d'attraction*  $B(\gamma)$  est l'ensemble des composantes connexes de  $A(\gamma)$  qui contiennent  $\gamma$ .

**Théorème 5.4.2.** Soit  $c \in \mathbb{C}$ . Soit  $z_*$  un point périodique attractif de  $Q_c$  et soit  $\gamma$  son orbite. Alors, 0 appartient au bassin immédiat d'attraction  $B(\gamma)$ . En particulier,  $d(Q_c^n(0), \gamma) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

**Corollaire 5.4.3.** Soit  $c \in \mathbb{C}$ .  $Q_c$  possède au plus un cycle attractif.

**Corollaire 5.4.4.** Si l'orbite de 0 tend vers l'infini, alors  $Q_c$  n'a aucun point périodique attractif.

**Notation.** Soit  $c \in \mathbb{C}$ . Lorsque  $Q_c$  possède un cycle attractif, on le note par  $\gamma_c$ .

Soit  $\mathcal{M}' = \{c \in \mathbb{C} : Q_c \text{ possède un cycle attractif}\}$ . Par les résultats précédents, il est clair que  $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ . À l'aide du théorème des fonctions implicites, on peut montrer que  $\mathcal{M}'$  est ouvert. Actuellement, on ignore si l'intérieur de l'ensemble de Mandelbrot est égale à  $\mathcal{M}'$ . En fait, il s'agit de l'un des problèmes ouverts les plus importants de la théorie des systèmes dynamiques.

Par ailleurs, le théorème suivant est un résultat fondamental. Démontré en 1919 par G. Julia et P. Fatou, il exprime la dichotomie existant au coeur de la famille quadratique  $Q_c(z)$ .

**Théorème 5.4.5.** *L'ensemble de Julia  $J(Q_c)$  est connexe si et seulement si l'orbite de 0 est bornée.*

**Remarques.**

1. Ainsi, l'ensemble de Mandelbrot constitue l'ensemble des valeurs de  $c \in \mathbb{C}$  pour lesquelles l'ensemble de Julia  $J(Q_c)$  est connexe.
2. Pour toute valeur de  $c$  appartenant au complément de  $\mathcal{M}$ , on peut montrer que l'ensemble de Julia  $J(Q_c)$  est totalement disconnexe. En particulier, c'est un ensemble homéomorphe à l'ensemble de Cantor.

**Remarque.** Un ensemble  $E$  est *homéomorphe* à un ensemble  $F$  s'il existe un *homéomorphisme*  $f : E \rightarrow F$ . Un *homéomorphisme* est une application bijective continue dont l'inverse est continue.

3. En somme, les résultats précédents montre qu'en étudiant seulement l'orbite de 0 sous  $Q_c$  on peut avoir une idée générale du comportement dynamique de cette fonction sur tout le plan complexe.

## 5.5 Étude de composantes de $\mathcal{M}$

Lorsque, pour un certain  $c$ ,  $Q_c$  possède un cycle attractif  $\gamma_c$ , on sait, par le théorème 5.4.2, que l'orbite de 0 se trouve dans le bassin d'attraction  $B(\gamma_c)$  et qu'elle est donc bornée. Ainsi, la valeur de  $c$  en question se trouve dans l'ensemble de Mandelbrot. Dans cette section, on désire faire l'étude de certaines composantes de  $\mathcal{M}$  de la forme

$$\{c \in \mathcal{M} : Q_c \text{ possède un cycle attractif de période } n\}.$$

### 5.5.1 Cardioïde principale

Déterminons les valeurs de  $c$  pour lesquelles  $Q_c$  a un point fixe attractif ou neutre.

Les points fixes de  $Q_c$  sont les solutions de

$$\begin{aligned} z &= Q_c(z) \quad \text{c'est-à-dire} \\ z &= z^2 + c \quad \text{c'est-à-dire} \\ z^2 - z + c &= 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

D'autre part, ayant  $Q'_c(z) = 2z$ , les points fixes attractifs ou neutres sont les solutions de (5.1) et

$$|2z| \leq 1 \tag{5.2}$$

Écrivons  $2z$  sous forme exponentielle

$$2z = re^{i\theta};$$

en reportant dans (5.1), on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{re^{i\theta}}{2}\right)^2 - \frac{re^{i\theta}}{2} + c &= 0 \quad \text{c'est-à-dire} \\ c &= \frac{1}{2}re^{i\theta} - \frac{1}{4}r^2e^{i2\theta}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

De plus, on demande

$$0 \leq r \leq 1 \tag{5.4}$$

Ainsi, (5.1) et (5.2) sont équivalentes à (5.3) et (5.4).

Autrement dit,  $c \in \mathbb{C}$  vérifie (5.1) et (5.2) si et seulement si

$$c = \frac{1}{2}re^{i\theta} - \frac{1}{4}r^2e^{2i\theta} \quad \text{où } 0 \leq r \leq 1, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (5.5)$$

Ainsi,  $Q_c$  a un point fixe attractif si  $r < 1$  et neutre si  $r = 1$ .

L'ensemble des  $c \in \mathbb{C}$  vérifiant (5.5) est l'ensemble borné par la courbe

$$c = c(\theta) = \frac{1}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{4}e^{2i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

en forme de cardioïde. Cet ensemble constitue le corps principal de  $M$ .

**Exercice 5.1.** Exprimez l'équation de la cardioïde principale sous forme polaire.

### 5.5.2 Bulbe pour la période 2

Les points de période 2 sont les solutions de

$$\begin{aligned} z &= Q_c^2(z) \quad \text{c'est-à-dire} \\ z &= (z^2 + c)^2 + c \quad \text{c'est-à-dire} \\ (z^2 + c)^2 + c - z &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Les points fixes de  $Q_c$  sont solutions de (5.6), mais les points fixes vérifient  $z^2 - z + c = 0$ . Ainsi, on peut factoriser le polynôme dans (5.6) par  $z^2 - z + c$ . On obtient

$$(z^2 + c)^2 + c - z = (z^2 - z + c)(z^2 + z + 1 + c)$$

et ainsi les points de période 2 qui ne sont pas des points fixes sont les solutions de

$$z^2 + z + 1 + c = 0 \quad (5.7)$$

Ayant  $(Q_c^2)(z) = (z^2 + c)^2 + c$ , on obtient

$$(Q_c^2)'(z) = 2(z^2 + c) \cdot 2z \quad (5.8)$$

Soient  $w_1$  et  $w_2$  les solutions de (5.7) les deux points de période 2, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{1 + \sqrt{1 - 4 - 4c}}{2} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3 - 4c}) \\ w_2 &= -\frac{1 - \sqrt{1 - 4 - 4c}}{2} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3 - 4c}) \end{aligned}$$

On a

$$Q_c(w_1) = w_2 \quad \text{c'est-à-dire } w_1^2 + c = w_2$$

et

$$Q_c(w_2) = w_1 \quad \text{c'est-à-dire } w_2^2 + c = w_1$$

d'où, d'après (5.8)

$$\begin{aligned} (Q_c^2)'(w_1) &= 2(w_1^2 + c)2w_1 = 2w_2 2w_1 = 4w_1 w_2 \\ (Q_c^2)'(w_2) &= 2(w_2^2 + c)2w_2 = 2w_1 2w_2 = 4w_1 w_2. \end{aligned}$$

Mais  $w_1$  et  $w_2$  étant les racines de (5.7), on a

$$w_1 w_2 = 1 + c$$

d'où

$$(Q_c^2)'(w_1) = (Q_c^2)'(w_2) = 4(1 + c).$$

On déduit donc que  $Q_c$  a un point de période 2 attractif si

$$|(Q_c^2)'(w_1)| = |(Q_c^2)'(w_2)| = 4|1 + c| < 1$$

c'est-à-dire

$$|c + 1| < \frac{1}{4}$$

donc, pour  $c$  dans le disque centré en  $-1$  de rayon  $\frac{1}{4}$ .

En ajoutant ce disque à la cardioïde principale, on obtient les deux plus grandes composantes de  $M$ .

On appellera ce disque le *bulbe pour la période 2*.

### 5.5.3 Autres bulbes

On rappelle que  $z_0$  est un point de période  $k$  super-attractif si  $z_0$  est  $k$ -périodique et  $(Q_c^k)'(z_0) = 0$ .

Soit  $\gamma = \{z_0, z_1, \dots, z_{k-1}\}$  son orbite. On a

$$\begin{aligned} (Q_c^k)'(z_0) &= Q_c'(z_{k-1}) \cdot Q_c'(z_{k-2}) \dots Q_c'(z_1) \cdot Q_c'(z_0) \\ &= 2^k z_0 z_1 \dots z_{k-1} \quad \text{car } Q_c'(z) = 2z. \end{aligned}$$

Ainsi,  $(Q_c^k)'(z_0) = 0$  si et seulement si un des  $z_i = 0$ , c'est-à-dire 0 appartient à l'orbite de  $z_0$  et donc 0 est un point  $k$ -périodique super-attractif. Donc,  $c$  doit vérifier

$$Q_c^k(0) = 0. \quad (5.9)$$

et, bien entendu, réciproquement si  $c$  vérifie (5.9), 0 est  $k$ -périodique et super-attractif. (5.9) est une équation de degré  $2^{k-1}$ .

Si  $c_0$  vérifie (5.9) pour un certain  $k$ , c'est-à-dire 0 est un point  $k$ -périodique super-attractif de  $Q_{c_0}$ , on déduit alors que pour  $c$  près de  $c_0$ ,  $Q_c$  a un point  $k$ -périodique attractif (et un seul d'après le corollaire 5.4.3), c'est-à-dire  $c \in M'$ . Soit  $W$  la composante connexe de  $M'$  contenant  $c_0$ . On définit

$$\begin{aligned} \rho_w : W &\rightarrow D = \{w \mid |w| < 1\} \\ c &\mapsto (Q_c^k)'(z_c) \end{aligned}$$

où  $z_c$  est l'unique point périodique attractif de période  $k$  de  $Q_c$ . Douady et Hubbard ont montré que  $\rho_w$  est biholomorphe (c'est-à-dire  $\rho_w$  est holomorphe, bijective et  $\rho_w^{-1}$  est aussi holomorphe). En particulier, on obtient que  $W$  est «topologiquement équivalent» à un disque. On appelle  $c_W$  le «centre» de  $W$  le point  $c_W \in W$  tel que  $\rho_w(c_W) = 0$  (unique car  $\rho_w$  bijective), c'est-à-dire c'est la valeur de  $c \in W$  pour laquelle 0 est  $k$ -périodique et super-attractif. On donne ci-dessous la liste des centres pour les périodes  $k$ ,  $k = 1, 2, 3$  et 4, c'est-à-dire les solutions de (5.9) pour  $k = 1, \dots, 4$  :

$$\begin{aligned} k = 1 & : c = 0 \\ k = 2 & : c^2 + c = 0 \\ k = 3 & : (c^2 + c)^2 + c = 0 \\ k = 4 & = [(c^2 + c)^2 + c]^2 + c = 0 \end{aligned}$$

- $k = 1$  : On a une seule solution :  $c = 0$ . C'est le «centre» de la région en forme de cardioïde.
- $k = 2$  : On a deux solutions :  $c = 0$  et  $c = -1$ .  $c = 0$  est solution lorsque  $k = 1$ .  $c = -1$  est le centre du bulbe principal à gauche de la région en forme de cardioïde contenant les valeurs de  $c$  pour lesquelles  $Q_c$  a un point 2-périodique attractif.
- $k = 3$  : Outre  $c = 0$ , on a les trois solutions :  $c_1 = -1.7549$ ,  $c_2 = -0.1226 + 0.7449i$  et  $c_3 = -0.1226 - 0.7449i$ .  
 $c_1$  est le centre de la «copie de  $M$ » à gauche.  
 $c_2$  et  $c_3$  sont les «centres» des bulbes (les seconds en grandeur) qui apparaissent en haut et en bas de la partie en forme de cardioïde.
- $k = 4$  : On a huit solutions dont les deux solutions lorsque  $k = 2$ . Les six autres solutions sont :  $c_1 = -1.3107$ ,  $c_2 = -1.9408$ ,  $c_{3,4} = 0.282 \pm 0.530i$  et  $c_{5,6} = -0.1565 \pm 1.0323i$ .

On pourrait continuer ainsi pour  $k > 4$ , e.g. lorsque  $k = 5$ ,  $Q_c^k(0)$  est un polynôme de degré 16 en  $c$  pour lequel  $c = 0$  est solution. Les quinze autres solutions donnent lieu à autant de bulbes pour la période 5.

## 5.6 Points de Misiurewicz

Ce sont les valeurs de  $c$  pour lesquelles  $0$  est un point éventuellement périodique de  $Q_c$ , mais n'est pas périodique, c'est-à-dire il existe un  $k \geq 1$  tel que  $Q_c^k(0)$  soit périodique sans que  $0$  ne soit périodique. On dira alors que  $0$  est *préperiodique*.

**Proposition 5.6.1.** *Si le point critique  $0$  est éventuellement périodique, mais n'est pas périodique, alors  $J(Q_c)$  est connexe et son intérieur est vide. On dit alors que  $J(Q_c)$  est une dendrite.*

### Exemples 5.6.2.

a) Prenons  $c = i$ , c'est-à-dire  $Q_i(z) = z^2 + i$ . On a alors

$$Q_i(0) = i, \quad Q_i^2(0) = Q_i(i) = -1 + i, \quad Q_i^3(0) = Q_i(-1 + i) = i, \dots$$

Ainsi,  $0$  est éventuellement 2-périodique, car  $Q_i(0) = i$  est 2-périodique, mais  $0$  n'est pas périodique. Donc, d'après le résultat précédent,  $J(Q_i)$  est une dendrite.

b) Prenons  $c = -2$ , c'est-à-dire  $Q_{-2}(z) = z^2 - 2$ . On a

$$Q_{-2}(0) = -2, \quad Q_{-2}^2(0) = Q_{-2}(-2) = 2, \quad Q_{-2}^3(2) = 2, \dots$$

Ainsi,  $0$  est éventuellement fixe (1-périodique), mais n'est pas périodique. Donc,  $J(Q_{-2})$  est une dendrite. En fait,  $J(Q_{-2}) = [-2, 2]$ .

Plus généralement, les points de Misiurewicz sont les valeurs de  $c$  pour lesquelles

$$Q_c^n(0) = Q_c^{n-k}(0) \quad \text{avec} \quad n \geq 3 \quad \text{et} \quad n - 2 \geq k \geq 1.$$

### Exemples 5.6.3.

1.  $n = 3$  et  $k = 1$ , c'est-à-dire  $(c^2 + c)^2 + c = c^2 + c$ . En ignorant la solution  $c = 0$  (c'est-à-dire pour laquelle  $z = 0$  est un point périodique), on obtient  $c = -2$  qui est la pointe de l'antenne gauche de  $M$ .
2.  $n = 4$ ,  $k = 2$ , c'est-à-dire  $[(c^2 + c)^2 + c]^2 + c = c^2 + c$  dont les solutions sont  $0, -1, -2$  et  $\pm i$ . Pour  $c = 0$  et  $-1$ , on a resp.  $z = 0$  un point fixe et  $z = 0$  un point de période 2. Ainsi, en plus de  $c = -2$ , on obtient les points de Misiurewicz  $\pm i$  qui sont les pointes des antennes en haut et en bas de  $M$ .

Il est démontré que l'ensemble des points de Misiurewicz est dense dans la frontière de  $M$  et que l'ensemble de Mandelbrot au voisinage d'un point de Misiurewicz  $c$  est «similaire» à l'ensemble de Julia  $J(Q_c)$  dans un voisinage de  $c$ .