Exercices 2

Ces exercices visent à examiner comment certaines notions usuelles en mathématiques peuvent se traduire dans un langage de premier ordre approprié.

1. On considère le langage $\mathscr{L}_N$ de l'arithmétique du premier ordre (Hamilton, page 52 ou 116).

   Afin d'alléger l'écriture, on utilisera ici, à l'intérieur de $\mathscr{L}_N$ même, les notations mathématiques usuelles ; on écrira donc $\times$ au lieu de f_2^2, $=$ au lieu de A_1^2, x, y et z au lieu de x_1, x_2, x_3, etc. On pourra aussi utiliser les symboles logiques usuels, y compris des symboles définis tels les connecteurs $\wedge$ ou $\vee$, de même que les quantificateurs $(\exists x)$ ou $(\exists_1 x)$.

   Il est possible d'introduire dans ce contexte la relation de *divisibilité* $\mathcal{D}(x, y)$, « x divise y », comme une abréviation de l'*ebf*

   $$(\exists z)(y = x \times z).$$

   Exprimer de même chacune des propriétés ou affirmations arithmétiques suivantes à l'aide d'une *ebf* de $\mathscr{L}_N$.

   (NB : Ne faire appel qu'à des symboles primitifs de $\mathscr{L}_N$ ou encore à des symboles préalablement définis.)

   (a) $x \neq 0$.
   (b) $x < y$.
   (c) x est un carré parfait.
   (d) x est le maximum de y et z.
   (e) Les nombres x et y ont exactement les mêmes diviseurs.
   (f) Toute division de naturels donne un quotient et un reste uniques.
   (g) x est un nombre premier.
   (h) x et y sont relativement premiers.
   (i) x et y sont deux premiers successifs.
   (j) x est le plus petit premier plus grand que y.
   (k) La conjecture de Goldbach.
   (l) Il existe une infinité de nombres premiers.
   (m) $x \equiv y \pmod{z}$.
   (n) x est le PGCD de y et z.
   (o) x est la partie entière de $\frac{y}{2}$.

2. Étant donné une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, exprimer à l'aide d'un langage de premier ordre approprié les concepts suivants :

   (a) La fonction f est continue en x.

   (b) La fonction f est continue sur $U \subseteq \mathbb{R}$.

   (c) La fonction f est uniformément continue sur $U \subseteq \mathbb{R}$.

3. Étant donné un espace vectoriel $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{R}$, exprimer à l'aide d'un langage de premier ordre approprié les concepts suivants :

   (a) Les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants.

   (b) Les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont linéairement dépendants.