Solution des exercices, Série 2

NB : Le signe « $\Longleftrightarrow$ », qui appartient à la métalangue, peut se lire ici comme « est équivalent à », ou encore comme « est une abréviation de ».

1. **Convention :** Pour simplifier l'écriture, on utilise dans $\mathscr{L}_N$ les notations suivantes :

$$\begin{array}{rll} 0 & \text{au lieu de} & a_1, \\ 1 & \text{au lieu de} & f_1^1(a_1), \\ 2 & \text{au lieu de} & f_1^1(f_1^1(a_1)), \\ x = y & \text{au lieu de} & A_1^2(x,y), \\ x+1 & \text{au lieu de} & f_1^1(x), \\ x+y & \text{au lieu de} & f_1^2(x,y), \\ x \times y & \text{au lieu de} & f_2^2(x,y). \end{array}$$

À noter que les solutions ne sont pas uniques ; on propose à l'occasion certaines variantes dans ce qui suit.

(a) $x \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists y(x = y+1)$.
Ou encore
   i. $x \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sim(x = 0)$.
   ii. $x \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sim\forall y(y + x = y)$.

(b) $x < y \quad \Longleftrightarrow \quad \exists z(z \neq 0 \ \wedge \ x + z = y)$.

(c) x est un carré parfait $\quad \Longleftrightarrow \quad \exists y(x = y \times y)$.

(d) $x = \max(y,z) \quad \Longleftrightarrow \quad (y < z \ \wedge \ x = z) \ \vee \ (y \geq z \ \wedge \ x = y)$.
Ou encore
   i. $x = \max(y,z) \quad \Longleftrightarrow \quad (y < z \ \rightarrow \ x = z) \ \wedge \ (y \geq z \ \rightarrow \ x = y)$.
   NB : (d) $\Leftrightarrow$ i : équivalence qui relève du calcul propositionnel (cf. les tables de vérité).
   On a donc $\quad x = \max(y,z) \quad \Longleftrightarrow \quad \#(y < z\,; x = z\,; x = y)$,
   où $\#$ est le connecteur ternaire « SI — ALORS — SINON — ».
   ii. $x = \max(y,z) \quad \Longleftrightarrow \quad (x = y \ \vee \ x = z) \ \wedge \ z < x+1 \ \wedge \ y < x+1$.
   NB : (d) $\Leftrightarrow$ ii : équivalence qui relève des maths.

(e) x et y ont exactement les mêmes diviseurs $\quad \Longleftrightarrow \quad \forall z(\mathcal{D}(z,x) \leftrightarrow \mathcal{D}(z,y))$.

(f) $\forall x \forall y(y \neq 0 \rightarrow (\exists_1 q \exists_1 r(x = q \times y + r \ \wedge \ 0 \leq r < y)))$,
où le symbole $\exists_1$ est défini à la page 111 de Hamilton.

(g) $\mathcal{P}(x) \iff x > 1 \wedge \forall y(\mathcal{D}(y,x) \to (y = 1 \vee y = x))$.

Ou encore $\mathcal{P}(x) \iff \exists_2 y \mathcal{D}(y,x)$,

le symbole $\exists_2$ étant défini de manière appropriée. (Cf. Hamilton p. 111 pour le cas $\exists_1$.)

(h) $\mathcal{RP}(x,y) \iff \forall z((\mathcal{D}(z,x) \wedge \mathcal{D}(z,y)) \to z = 1)$.

C'est-à-dire $\mathcal{RP}(x,y) \iff \text{PGCD}(x,y) = 1$, où PGCD est défini à la partie (n).

NB : On remarquera ici que la phrase intuitive « s'il existe un z qui divise à la fois x et y, alors il est égal à 1 » (avec le $\exists$ à l'intérieur du « si », mais une certaine ambiguïté sur le champ de ce quantificateur) est devenue « pour tout z, s'il divise à la fois x et y, alors il est égal à 1 » (avec le $\forall$ à l'extérieur du « si », le champ de $\forall$ étant toute l'implication qui suit).

(i) x et y sont deux premiers successifs $\iff$

$$x \neq y \wedge \mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{P}(y) \wedge \sim\exists z(\mathcal{P}(z) \wedge (x < z < y \vee y < z < x)).$$

(j) x est le plus petit premier plus grand que y $\iff$

$$y < x \wedge \mathcal{P}(x) \wedge \sim\exists z(\mathcal{P}(z) \wedge y < z < x).$$

(k) $\forall x((\mathcal{D}(2,x) \wedge 2 < x) \to \exists u \exists v(\mathcal{P}(u) \wedge \mathcal{P}(v) \wedge x = u + v))$.

(l) $\forall x \exists y(\mathcal{P}(y) \wedge x < y)$.

(m) $x \equiv y \pmod z \iff \exists k(x = y + z \times k \vee y = x + z \times k)$.

Ou encore il s'agit d'exprimer le fait qu'en divisant x et y par z, on obtient le même reste.

(n) $x = \text{PGCD}(y,z) \iff \mathcal{D}(x,y) \wedge \mathcal{D}(x,z) \wedge \forall u((\mathcal{D}(u,y) \wedge \mathcal{D}(u,z)) \to u \leq x)$.

Ou encore $x = \text{PGCD}(y,z) \iff \exists v \exists w(y = x \times v \wedge z = x \times w \wedge \mathcal{RP}(v,w))$.

(o) $x = \left[\frac{y}{2}\right] \iff y = 2x \vee y = 2x + 1$.

Ou encore $x = \left[\frac{y}{2}\right] \iff 2x \leq y < 2x + 2$.

2. (a) f est continue en x $\iff$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y)(|y - x| < \delta \to |f(y) - f(x)| < \varepsilon)$$

C'est-à-dire $\forall \varepsilon(\varepsilon > 0 \to \exists \delta(\delta > 0 \wedge \forall y(|y - x| < \delta \to |f(y) - f(x)| < \varepsilon)))$

(b) f est continue sur $U \subseteq \mathbb{R}$

$\iff$ $\forall x \in U$ « f est continue en x »

$\iff$ $(\forall x \in U)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in U)(|y - x| < \delta \to |f(y) - f(x)| < \varepsilon)$

C'est-à-dire

$$\forall x(x \in U \to \forall \varepsilon(\varepsilon > 0 \to \exists \delta(\delta > 0 \wedge \forall y(y \in U \to (|y - x| < \delta \to |f(y) - f(x)| < \varepsilon)))))$$

ou encore

$$\forall x(\widetilde{U}(x) \to \forall \varepsilon(\varepsilon > 0 \to \exists \delta(\delta > 0 \wedge \forall y(\widetilde{U}(y) \to (|y - x| < \delta \to |f(y) - f(x)| < \varepsilon)))))$$

où $\widetilde{U}$ est un symbole de prédicat unaire pour « appartient à U ».

(c) f est uniformément continue sur $U \subseteq \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U)(\forall y \in U)(|y - x| < \delta \to |f(y) - f(x)| < \varepsilon)$$

3. (a) Les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants $\quad \Longleftrightarrow$

$$(\forall \lambda_1 \in \mathbb{R})(\forall \lambda_2 \in \mathbb{R}) \ldots (\forall \lambda_n \in \mathbb{R})$$
$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \to \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0)$$

C'est-à-dire

$$\forall \lambda_1 \forall \lambda_2 \ldots \forall \lambda_n (R(\lambda_1) \wedge R(\lambda_2) \wedge \cdots \wedge R(\lambda_n) \to$$
$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \to \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0))$$

où R est un symbole de prédicat unaire pour « appartient à $\mathbb{R}$ ».

(b) Il s'agit de nier l'*ebf* précédent.