Exercices 3

Dans ces exercices, on utilise le quantificateur $\exists$ ainsi que les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ en tant qu'abréviations, telles qu'introduites à la page 53 de Hamilton.

1. Soit un langage de premier ordre $\mathscr{L}$ contenant un symbole de prédicat unaire A_7^1 et un symbole de prédicat binaire A_4^2. Considérons les interprétations suivantes pour $\mathscr{L}$:

   - I_1, avec $D_{I_1} = \mathbb{R}$, $A_7^1(x_i)$ interprété comme « x_i est rationnel » et $A_4^2(x_i, x_j)$ interprété comme $x_i < x_j$.
   - I_2, avec $D_{I_2} = \mathbb{Z}$, $A_7^1(x_i)$ interprété comme « x_i est négatif » et $A_4^2(x_i, x_j)$ interprété comme $x_i < x_j$.
   - I_3, avec $D_{I_3} = \mathbb{N}$, $A_7^1(x_i)$ interprété comme « x_i est pair » et $A_4^2(x_i, x_j)$ interprété comme $x_i \mid x_j$.

   Pour chaque *ebf* close qui suit, déterminer si elle est vraie ou fausse dans chacune de ces trois interprétations.

   (a) $(\forall x_3)(\exists x_9)(A_7^1(x_9) \wedge A_4^2(x_3, x_9))$
   (b) $(\exists x_1)(\forall x_{11})(A_4^2(x_1, x_{11}))$
   (c) $(\forall x_5)(\forall x_6)(\exists x_7)((A_4^2(x_5, x_7) \wedge (A_4^2(x_7, x_6)) \vee \sim A_4^2(x_5, x_6))$

2. Montrer que chacune des *ebf*s suivantes n'est pas logiquement valide.

   (a) $(\forall x_3)(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \ \rightarrow\ ((\forall x_3)\mathcal{A} \vee (\forall x_3)\mathcal{B})$
   (b) $((\forall x_1)A_1^1(x_1) \rightarrow (\forall x_1)A_2^1(x_1)) \rightarrow ((\forall x_1)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_2^1(x_1)))$

3. Pour chacun des énoncés suivants, trouver une interprétation I dans laquelle l'énoncé est vrai, et une interprétation I^* dans laquelle il est faux.

   (a) $(\forall x)((\mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{Q}(x)) \rightarrow \mathcal{R}(x))$
   (b) $\mathcal{A}(a_1) \wedge (\exists x)(\mathcal{A}(x) \wedge \sim\mathcal{B}(x, a_2))$
   (c) $(\forall x)(\forall y)(\mathcal{A}(x,y) \vee \mathcal{A}(y,x)) \wedge (\forall x)(\exists y)\mathcal{A}(x,y) \wedge (\forall y)(\exists x) \sim\mathcal{A}(x,y)$

4. Étant donné un langage de premier ordre $\mathscr{L}$ et une *ebf* quelconque $\mathcal{A}(x,y)$ contenant exactement deux variables libres, on considère l'ensemble d'*ebf*s $\Gamma = \{A1, A2, A3\}$, où

   $$\begin{aligned} A1 &: (\forall x) \sim\mathcal{A}(x,x) \\ A2 &: (\forall x)(\forall y)(\forall z)((\mathcal{A}(x,y) \wedge \mathcal{A}(y,z)) \ \rightarrow\ \mathcal{A}(x,z)) \\ A3 &: (\forall x)(\exists y)\mathcal{A}(x,y) \end{aligned}$$

   Montrer que si une interprétation I est un modèle de Γ, alors le domaine D_I contient une infinité d'éléments.