Analyse non standard

Soit la structure relationnelle R^* élémentairement équivalente au corps $R = \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, -, \times, ^{-1}, = \rangle$, telle qu'introduite dans le cours, et soit $\mathbb{R}^*$, son domaine. À noter que $\mathbb{R}^*$ est donc lui aussi un corps car, en vertu de l'équivalence élémentaire, il satisfait aux axiomes de corps.

Définitions

- Les éléments de $\mathbb{R}^*$ sont appelés *nombres hyperréels*. Un hyperréel est dit *standard* s'il appartient à $\mathbb{R}$, et *non standard* sinon.

  NB : On écrit parfois $\mathbb{HR}$ à la place de $\mathbb{R}^*$.

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$;
  - x est dit *fini* ssi il existe $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $|x| < r$;
  - x est dit *infinitésimal* ssi pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, $|x| < r$;
  - x est dit *infini* ssi pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, $|x| > r$.

- Soit $x, y \in \mathbb{R}^*$; x et y sont dits *infiniment proches* (et on écrit $x \approx y$) ssi la différence $x - y$ est infinitésimale.

- Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on définit la *monade* de x, notée M_x, comme suit :

  $$M_x = \{ y \in \mathbb{R}^* \mid x \approx y \}$$

  M_0 est donc l'ensemble des infinitésimaux. On dénote parfois cette monade par $\mathbb{I}$.

Théorème

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, fini ; alors il existe un, et un seul, $r \in \mathbb{R}$ tel que $x \approx r$.

NB : Ce réel r s'appelle la *partie standard* de x, et on écrit $r = st(x)$.

Démonstration :
Si x est un hyperréel standard — c'est-à-dire un réel —, il n'y a rien à prouver. On suppose donc que x est un hyperréel non standard. On peut supposer de plus, sans perte de généralité, que $x > 0$ — le cas $x < 0$ se traitant de façon symétrique. À noter que x étant par hypothèse fini, il existe un réel positif z tel que $x < z$.

- *Existence :*

  Posons $X = \{ t \in \mathbb{R} \mid t < x \}$. Alors X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide, car $0 \in X$. De plus X est majoré, z étant plus grand que tout élément de X. La propriété de *complétude* de $\mathbb{R}$ — au sens de l'analyse classique — entraîne donc l'existence de la borne supérieure (ou supremum) de X, $r \in \mathbb{R}$, satisfaisant $r \geq t$, quel que soit $t \in X$.

  On va montrer que $x \approx r$. Il faut donc vérifier que la différence $x - r$ est infinitésimale. Soit à cet effet un réel positif quelconque s et montrons que $|x - r| < s$. Il y a ici deux cas à considérer.

- $x < r$

  On a alors $|x - r| = r - x$. Supposons au contraire que $r - x > s$ (on ne peut avoir $r - x = s$, car x est non standard). On aurait alors $r - s > x$, de sorte que $r - s$ serait un majorant de X inférieur à r, contredisant que r est le sup de X.

- $x > r$

  On a maintenant $|x - r| = x - r$. Or considérant un élément quelconque t de X, on voit que $r + s > r \geq t$, de sorte que $r + s \notin X$. Par définition de X, cela entraîne que $r + s > x$, c'est-à-dire $s > x - r$.

- *Unicité :*

  On va montrer que r est le seul réel infiniment près de x. Soit donc r_1 et r_2 tels que $x \approx r_1$ et $x \approx r_2$. On peut se convaincre sans trop de difficulté que la relation $\approx$ est transitive, de sorte que $r_1 \approx r_2$, c'est-à-dire $r_1 - r_2 \approx 0$. La différence $r_1 - r_2$, qui est un nombre réel, est donc infinitésimale. Comme 0 est l'unique réel infinitésimal, il s'ensuit que $r_1 - r_2 = 0$, et donc $r_1 = r_2$. ■

Définitions

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

- f est *continue* en a ssi pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $x \approx a \Longrightarrow f(x) \approx f(a)$.
- f est *dérivable* en a ssi, quels que soient les infinitésimaux i et j non nuls, les deux quotients différentiels

$$\frac{f(a+i) - f(a)}{i} \qquad \text{et} \qquad \frac{f(a+j) - f(a)}{j}$$

  sont finis et infiniment proches.
- si f est dérivable en a, on pose

$$f'(a) = st\left(\frac{f(a+i) - f(a)}{i}\right),$$

  où i est un infinitésimal quelconque.

Théorème

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration :

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x \approx a$, et soit i infinitésimal tel que $x = a + i$. Comme f est dérivable en a, on a $f'(a) = st\left(\frac{f(a+i)-f(a)}{i}\right)$, le quotient différentiel étant fini. Mais comme son dénominateur est infinitésimal, il doit en être de même du numérateur, de sorte que $f(a+i) \approx f(a)$. ■