Arithmétique non standard

Soit la structure relationnelle N^* élémentairement équivalente à $N = \langle\, \mathbb{N}, 0, {}', +, \times, = \rangle$, telle qu'introduite dans le cours, et soit $\mathbb{N}^*$, son domaine.

Définitions

- Les éléments du domaine $\mathbb{N}^*$ sont appelés *nombres hypernaturels*. Un hypernaturel est dit *standard* s'il appartient à $\mathbb{N}$, et *non standard* sinon.

  NB : On écrit parfois $\mathbb{HN}$ à la place de $\mathbb{N}^*$.

- Pour $x \in \mathbb{N}^*$, on définit la *galaxie* de x, notée G_x, comme suit :

$$G_x = \{\, y \in \mathbb{N}^* \mid |x - y| \in \mathbb{N} \,\}$$

La structure d'ordre sur $\mathbb{N}^*$

Les énoncés suivants sont vrais dans l'interprétation N — et donc par conséquent également dans l'interprétation N^*. Partant de renseignements à propos de la structure d'ordre sur $\mathbb{N}$, on en dégage ainsi une vision de l'ordre sur $\mathbb{N}^*$.

- $\forall xyz\, (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$ *(transitivité de <)*
- $\forall xy\, (x < y \vee x = y \vee x > y)$ *(trichotomie — l'ordre est total)*
- $\forall x\, (0 \leq x)$ *(il y a un plus petit élément)*
- $\forall x\, (x < x + 1)$ *(il n'y a pas de plus grand élément)*
- $\forall x \sim\!\exists y\, (x < y \wedge y < x + 1)$ *(l'ordre est discret)*
- $\forall x\, (x \neq 0 \rightarrow \exists y\, (x = y + 1))$ *(tout élément non nul est un successeur — il n'y a donc pas de plus petit « nouveau »)*
- $\forall x \exists y\, (x + x = y)$ *(duplication)*
- $\forall x \exists y\, (x = y + y \vee x = y + y + 1)$ *(dimidiation — y est la partie entière de $\frac{x}{2}$)*
- $\forall xy\, (x + 1 < y \rightarrow \exists z\, ((x + y = z + z \vee x + y = z + z + 1) \wedge x < z < y)$ *sauf exception, la partie entière de $x + y$ est entre x et y — densité des « blocs de nouveaux »)*