La conséquence sémantique

Notations :

- VARPROP est l'ensemble de toutes les variables propositionnelles [1] ; on peut donc voir cet ensemble comme
$$\text{VARPROP} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}\ ;\ ^{2}$$
- FORPROP désigne l'ensemble de toutes les formes propositionnelles [3] (aussi appelées propositions).

Définition 1 : [4]
Une *valuation* [5] est une fonction $v : \text{VARPROP} \longrightarrow \{V, F\}$. ■

Une valuation assigne donc une valeur de vérité, V ou F, à chacune des variables propositionnelles. Cependant, dans un contexte spécifique, on ne s'intéressera habituellement qu'à un sous-ensemble fini de VARPROP (par exemple les n premières variables propositionnelles $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, qui seraient celles figurant dans une proposition donnée $\mathcal{A}$).

Toute valuation v se prolonge de façon immédiate à une fonction $\bar{v} : \text{FORPROP} \longrightarrow \{V, F\}$ ***en vertu des règles régissant les cinq connecteurs*** $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow$ et $\leftrightarrow$ (il suffit de penser à la sémantique de ces connecteurs). Par abus de langage, une telle fonction $\bar{v}$ s'appelle aussi une valuation (que l'on note habituellement et abusivement v, sans la barre).

Remarque : On pourrait reformuler les choses comme suit. [6]

> **Définition 2 :**
> Une *valuation* est une fonction $v : \text{FORPROP} \longrightarrow \{V, F\}$ telle que, quelles que soient les propositions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$,
>
> (i) $v(\sim \mathcal{A}) \neq v(\mathcal{A})$,
> (ii) $v(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = F$ si, et seulement si, $v(\mathcal{A}) = V$ et $v(\mathcal{B}) = F$. ■

---

1. En anglais : *statement variables* (Hamilton, p. 3 — voir aussi p. 28, déf. 2.1, clause 1, *alphabet*).
2. Lorsqu'on ne travaille qu'avec deux ou trois variables propositionnelles, on écrit souvent p, q, r à la place de p_1, p_2, p_3.
3. En anglais : *statement forms* (Hamilton, p. 7, déf. 1.2 — voir aussi p. 28, déf. 2.1, clause 2, *ebfs*).
4. Cette définition ne se retrouve pas comme telle dans le livre de Hamilton, mais je la trouve utile. Voir cependant la remarque qui suit, qui porte sur la définition 2.
5. En anglais : *valuation* ou *truth assignment*, c'est-à-dire l'attribution d'une valeur de vérité à chaque variable propositionnelle.
6. Voir Hamilton, p. 37, déf. 2.12.

Les clauses (i) et (ii) de la définition 2 nous assurent que le comportement d'une valuation par rapport aux cinq connecteurs est approprié, c'est-à-dire qu'une valuation respecte bien la signification des connecteurs, telle que définie par les tables de vérité. Cette observation repose sur la notion d'*ensemble adéquat de connecteurs* (Hamilton p. 19, déf. 1.23). ■

Définition 3 :
Soit $\mathcal{A} \in$ FORPROP et v, une valuation. Lorsque $v(\mathcal{A}) = V$, on dit que v est un *modèle* de la forme propositionnelle $\mathcal{A}$, ou encore que $\mathcal{A}$ est *satisfaite* par la valuation v. ■

Définition 4 :[7]
Soit $\mathcal{A}$, une forme propositionnelle.

- $\mathcal{A}$ est *satisfiable* si, et seulement si, **il existe** une valuation v qui est un modèle de $\mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}$ est une *tautologie* si, et seulement si, **toute** valuation v est un modèle de $\mathcal{A}$; **notation :** $\models \mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}$ est une *contradiction* si, et seulement si, **aucune** valuation v n'est un modèle de $\mathcal{A}$. ■

Soit $\mathcal{A}$ une proposition comprenant n variables propositionnelles. Pour fixer les idées, on supposera que ces variables propositionnelles sont précisément les n premières variables propositionnelles $p_1, p_2, \ldots, p_n$. (L'ensemble $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ est alors appelé le *support* de $\mathcal{A}$.) Si v_1 et v_2 sont deux valuations coïncidant sur le support de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire telles que $v_1(p_i) = v_2(p_i)$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, alors forcément $v_1(\mathcal{A}) = v_2(\mathcal{A})$. Il y a donc un nombre fini de valuations distinctes à considérer en rapport avec $\mathcal{A}$ (à savoir 2^n), chacune de ces valuations correspondant à l'une des 2^n lignes de la table de vérité de $\mathcal{A}$.

Définition 5 :[8]
Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in$ FORPROP.

(i) $\mathcal{A}$ *implique sémantiquement* $\mathcal{B}$ signifie que la proposition $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est une tautologie.

Notation : $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$.

(On dit aussi que $\mathcal{A}$ *implique logiquement* ou *tautologiquement* $\mathcal{B}$, ou encore que $\mathcal{B}$ est une *conséquence sémantique* de $\mathcal{A}$.)

(ii) $\mathcal{A}$ est *sémantiquement équivalent* à $\mathcal{B}$ signifie que la proposition $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ est une tautologie.

Notation : $\mathcal{A}$ *éq* $\mathcal{B}$.

(On dit aussi que $\mathcal{A}$ est *logiquement équivalent* à $\mathcal{B}$.) ■

7. Cette définition prolonge la définition 1.5, Hamilton p. 8.
8. Hamilton p. 9, déf. 1.7.

On observera les relations fondamentales suivantes, qui ne sont que de simples réécritures de la définition 5 :

$$\mathcal{A} \models \mathcal{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \models \mathcal{A} \to \mathcal{B}\,.$$

$$\mathcal{A} \;\acute{e}q\; \mathcal{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \models \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}\,.$$

Notons aussi que $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ équivaut au fait que pour toute valuation v, si $v(\mathcal{A}) = V$, alors $v(\mathcal{B}) = V$.[9]

Autrement dit,

(∗) $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ si, et seulement si, tout modèle de $\mathcal{A}$ est un modèle de $\mathcal{B}$.

De même,

$\mathcal{A}$ *éq* $\mathcal{B}$ si, et seulement si, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont exactement les mêmes modèles.

Définition 6 :
Soit $\Gamma \subseteq$ FORPROP, un ensemble de formes propositionnelles. On dit que Γ est *satisfiable* lorsque toutes les propositions dans Γ sont satisfaites simultanément par une même valuation. ■

Autrement dit, par définition,

> Γ est satisfiable si, et seulement si, il existe une valuation v telle que, pour toute proposition $\mathcal{A} \in \Gamma$, $v(\mathcal{A}) = V$.

Une telle valuation v est donc un modèle de toutes les propositions dans Γ ; on dit alors que v est un *modèle de* Γ, ou encore que Γ est *satisfaite* par la valuation v. On désigne par $\mathbf{Mod}(\Gamma)$ l'ensemble de tous les modèles de Γ, c'est-à-dire

$$\mathbf{Mod}(\Gamma) = \{\, v,\ \text{valuation} \ \mid\ \text{pour tout } \mathcal{A} \in \Gamma,\ v(\mathcal{A}) = V \,\}\,.$$

Cas particuliers :

- Si $\Gamma = \{\mathcal{A}\}$:

  on revient au cas d'une proposition satisfiable.

---

9. Voici une démonstration de cette équivalence.
(i) Supposons d'abord que $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$, c'est-à-dire que $\models \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, et soit v_0, une valuation telle que $v_0(\mathcal{A}) = V$. Mais alors $v_0(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) = V$, puisque $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est une tautologie, de sorte qu'on a forcément $v_0(\mathcal{B}) = V$.
(ii) Inversement, supposons que

(†) pour toute valuation $v, v(\mathcal{A}) = V$ entraîne que $v(\mathcal{B}) = V$.

Étant donné une valuation quelconque v_0, il nous faut donc montrer que $v_0(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) = V$. Mais si au contraire $v_0(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) = F$, on aurait $v_0(\mathcal{A}) = V$ et $v_0(\mathcal{B}) = F$, ce qui contredit l'hypothèse (†).

- Si $\Gamma = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n\}$:

  on vérifie facilement dans ce cas que Γ est satisfiable si, et seulement si, la proposition $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n$ est satisfiable. (Plus précisément, Γ est satisfaite par une certaine valuation v si, et seulement si, $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n$ est satisfaite par la même valuation v.)

- Si $\Gamma = \emptyset$:

  par défaut on considère que toute valuation v est un modèle de $\Gamma = \emptyset$; en effet, pour pouvoir nier cette affirmation, il faudrait trouver une proposition $\mathcal{A} \in \Gamma$ telle que $v(\mathcal{A}) = F$, ce qui est bien sûr impossible puisque Γ est vide.

Définition 7 :
Soit $\Gamma \subseteq$ FORPROP, un ensemble (fini ou infini) de propositions, et $\mathcal{B} \in$ FORPROP, une proposition donnée. On dit que Γ *implique sémantiquement* $\mathcal{B}$ si, et seulement si, tout modèle de Γ est un modèle de $\mathcal{B}$. [10]
Notation : $\Gamma \models \mathcal{B}$.
(On dit aussi que Γ *implique logiquement* ou *tautologiquement* $\mathcal{B}$, ou encore que $\mathcal{B}$ est une *conséquence sémantique* de Γ. On peut donc voir Γ comme un ensemble d'« hypothèses » qui entraînent $\mathcal{B}$.)
On désigne par **Con**(Γ) l'ensemble de toutes les conséquences sémantiques de Γ, c'est-à-dire

$$\mathbf{Con}(\Gamma) = \{\, \mathcal{B} \in \text{FORPROP} \mid \Gamma \models \mathcal{B} \,\}\,.$$

■

$\Gamma \models \mathcal{B}$ équivaut donc au fait suivant :

> quelle que soit la valuation v, si v est un modèle de Γ, alors $v(\mathcal{B}) = V$.

Conséquemment, $\Gamma \not\models \mathcal{B}$ (Γ *n'implique pas sémantiquement* $\mathcal{B}$) signifie que :

> il existe une valuation v qui est un modèle de Γ et telle que $v(\mathcal{B}) = F$.

Cas particuliers :

- Si $\Gamma = \{\mathcal{A}\}$:

  on a $\{\mathcal{A}\} \models \mathcal{B}$, ce qui revient au cas de la définition 5 (on écrit donc simplement $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$).

- Si $\Gamma = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n\}$:

  on vérifie dans ce cas que

  $$\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n\} \models \mathcal{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \models (\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n) \to \mathcal{B}$$

  (voir Hamilton p. 25, proposition 1.32).

10. On introduit donc ici une généralisation de $(*)$. Cette idée est introduite dans Hamilton sous la notion de *forme d'argument valide* (déf. 1.28, p. 23). La notation de Hamilton est « Γ ; $\therefore$ $\mathcal{B}$ ». Notons que Hamilton se restreint au cas où Γ est fini, c'est-à-dire où l'argument se fait à partir d'un ensemble fini d'hypothèses.

- Si $\Gamma = \emptyset$:

  comme il a été convenu que toute valuation est modèle de l'ensemble vide, $\emptyset \models \mathcal{B}$ signifie donc que $v(\mathcal{B}) = V$, quelle que voit la valuation v. En d'autres termes, $\mathcal{B}$ est une tautologie. C'est pourquoi on écrit simplement $\models \mathcal{B}$, tel que convenu plus haut.

Notations :

- **Taut** est l'ensemble de toutes les tautologies.
- Si Γ est un ensemble de propositions et si $\mathcal{A}$ est une proposition, on désigne par

  $$\Gamma, \mathcal{A}$$

  la réunion $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\}$ (c'est-à-dire l'ajout à Γ de l'« hypothèse » $\mathcal{A}$).
- $\perp$ représente une contradiction (par exemple la proposition $p_1 \wedge \sim p_1$). La notation $\Gamma \models \perp$ signifie donc que Γ n'a pas de modèle ; en effet, si un tel Γ avait un modèle v, on devrait avoir $v(p_1 \wedge \sim p_1) = V$, ce qui n'a pas de sens.

Exercices :

1. On considère les n premières variables propositionnelles $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

   (a) Combien peut-on écrire de formes propositionnelles différentes à partir de ces n variables propositionnelles ? (On s'intéresse ici à la « forme » de ces formes propositionnelles, et non à leur « sens ».)

   (b) Considérant l'ensemble de toutes les valuations, convenons de dire que deux valuations v et v' sont *n-équivalentes* si elles coïncident sur les variables $p_1, p_2, \ldots, p_n$, c'est-à-dire si $v(p_i) = v'(p_i)$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$.

      i. Vérifier que la n-équivalence est bien une relation d'équivalence (au sens usuel du terme).

      ii. Combien y a-t-il de classes d'équivalences ?

   (c) Revenons maintenant à l'ensemble de toutes les formes propositionnelles pouvant s'écrire à l'aide des n variables propositionnelles $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (partie (a)). On considère la relation d'« équivalence sémantique » *éq* sur cet ensemble, telle qu'introduite à la définition 5-ii.

      i. Vérifier que la relation *éq* est bien une relation d'équivalence (au sens usuel du terme).

      ii. Combien y a-t-il de classes d'équivalences ?

2. Soit des ensembles de propositions Γ, Γ_1 et Γ_2 et des propositions $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$. Montrer les résultats suivants.

   (a) $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{Con}(\Gamma_1) \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_2)$. (*monotonicité*)

   (b) $\Gamma \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma)$. (*croissance*)

   (c) $\mathbf{Con}(\Gamma) = \mathbf{Con}(\mathbf{Con}(\Gamma))$. (*idempotence*)

   (d) $\mathbf{Con}(\Gamma_1) \cup \mathbf{Con}(\Gamma_2) \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$. (*sous-additivité*)

   (e) Pour tout Γ, $\mathbf{Taut} \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma)$.

   (f) $\mathcal{A} \in \mathbf{Con}(\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n\}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n \wedge \sim \mathcal{A}$ est insatisfiable.

   (g) $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{Mod}(\Gamma_2) \subseteq \mathbf{Mod}(\Gamma_1)$.

   (h) $\Gamma, \mathcal{A} \models \mathcal{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \models \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.

   (i) $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n\} \models \mathcal{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \models \mathcal{A}_1 \rightarrow (\mathcal{A}_2 \rightarrow (\cdots \rightarrow (\mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{B}) \cdots))$.

   (j) $[\,\Gamma \models \mathcal{A}$ et $\Gamma \models \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}\,] \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \models \mathcal{B}$. (*modus ponens*)

   (k) $[\,\Gamma \models \mathcal{A}$ et $\Gamma \models \mathcal{B}\,] \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \models \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$.

   (l) $[\,\Gamma \models \mathcal{A}$ ou $\Gamma \models \mathcal{B}\,] \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \models \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.

   (m) $\Gamma \models \perp \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \models \mathcal{A}$.

   (n) $\Gamma \models \mathcal{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma, \sim \mathcal{A} \models \perp$. (*reductio ad absurdum*)

   (o) $\mathcal{A} \rightarrow \perp$ *éq* $\sim \mathcal{A}$.