Exercices 1

1. Lesquels parmi les ensembles de propositions suivants sont satisfiables ?

   (a) $\Gamma_1 = \{\, \mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{C},\ (\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \leftrightarrow \sim \mathcal{B} \,\}$.

   (b) $\Gamma_2 = \{ \sim (\sim \mathcal{B} \vee \mathcal{A}),\ \mathcal{A} \vee \sim \mathcal{C},\ \mathcal{B} \to \sim \mathcal{C} \,\}$.

   (c) $\Gamma_3 = \{\, \mathcal{D} \to \mathcal{B},\ \mathcal{A} \vee \sim \mathcal{B},\ \sim (\mathcal{D} \wedge \mathcal{A}),\ \mathcal{D} \,\}$.

2. Vrai ou faux ?

   (a) $\{\, \mathcal{B} \to \mathcal{C} \,\} \models (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \to \mathcal{C}$.

   (b) $\{\, \mathcal{A} \to \mathcal{B} \,\} \models \mathcal{A} \to (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$.

   (c) $\{\, \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \mathcal{B} \,\} \models \mathcal{A}$.

   (d) $\{\, \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \sim \mathcal{A} \to \mathcal{B} \,\} \models \mathcal{B}$.

   (e) $\{\, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \mathcal{A} \,\} \models \sim \mathcal{B}$.

   (f) $\{\, \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \,\} \models \mathcal{B}$.

   (g) $\{\, \mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}), \sim \mathcal{D} \vee \mathcal{A}, \mathcal{B} \,\} \models \mathcal{D} \to \mathcal{C}$.

3. Pour chacun des ensembles d'hypothèses suivants, en tirer une conséquence sémantique « naturelle ».

   (a) $\{\, \mathcal{A} \to (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})\, , \sim \mathcal{B} \wedge \sim \mathcal{C} \,\}$.

   (b) $\{\, \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \vee \mathcal{C}\, , \sim \mathcal{B} \,\}$.

   (c) $\{\, \mathcal{A} \to \mathcal{B}\, , \sim \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \to \mathcal{C} \,\}$.

   (d) $\{\, (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C}\, , \sim \mathcal{B} \,\}$.

   (e) $\{ \sim \mathcal{A} \to \mathcal{B}\, , \mathcal{C} \to \sim \mathcal{B} \,\}$.

   (f) $\{\, \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \to \mathcal{C} \vee \mathcal{D}\, , \mathcal{A}\, , \sim \mathcal{C} \,\}$.

   (g) $\{ \sim (\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})\, , \mathcal{A} \,\}$.

   (h) $\{\, \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}\, , \sim \mathcal{B} \,\}$.

   (i) $\{\, \mathcal{A} \to \mathcal{B}\, , \mathcal{A} \to \sim \mathcal{B} \,\}$.

   (j) $\{\, \mathcal{A} \to \mathcal{B}\, , \sim \mathcal{A} \to \mathcal{B} \,\}$.

   (k) $\{\, (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{B}\, , \sim \mathcal{A} \,\}$.

   (l) $\{\, (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{A} \,\}$.

   (m) $\{\, (\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) \leftrightarrow \mathcal{A} \,\}$.

4. Soit le connecteur ternaire # défini comme suit : étant donné des formes propositionnelles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et une valuation v, on pose

$$(*) \qquad v(\#(\mathcal{A}\,;\mathcal{B}\,;\mathcal{C})) = \begin{cases} v(\mathcal{B}) & \text{si } v(\mathcal{A}) = V\,, \\ v(\mathcal{C}) & \text{si } v(\mathcal{A}) = F\,. \end{cases}$$

$\#(\mathcal{A}\,;\mathcal{B}\,;\mathcal{C})$ correspond donc intuitivement à « SI $\mathcal{A}$ ALORS $\mathcal{B}$, SINON $\mathcal{C}$ ».

(a) Construire la table de vérité de # à partir de la définition $(*)$.

(b) Vérifier que la forme propositionnelle $\#(\mathcal{A}\,;\mathcal{B}\,;\mathcal{C})$ est logiquement équivalente à chacune des formes propositionnelles suivantes :

i. $(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \wedge (\sim \mathcal{A} \to \mathcal{C})$,

ii. $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\sim \mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$.

(c) Trouver une tautologie « simple » de la forme

$$\sim (\#(\mathcal{A}\,;\mathcal{B}\,;\mathcal{C})) \leftrightarrow \#(-\,;-\,;-).$$

TUYAU : Travailler sur des chaînes d'équivalences en utilisant la partie (b).