Recherche de FND et de FNC

Étant donné une proposition $\mathcal{A}$, il y a différentes techniques pour trouver une *forme normale disjonctive* et une *forme normale conjonctive* de $\mathcal{A}$. Nous illustrons la chose sur un exemple.
N.B. : La notion de FND ou de FNC d'une proposition $\mathcal{A}$ N'EST PAS UNIQUE.

Soit donc la forme propositionnelle

$$\mathcal{A} : (p \to q) \leftrightarrow \sim r\,.$$

Méthode 1 :
Nous construisons la table de vérité de $\mathcal{A}$, puis nous appliquons la technique de la Proposition 1.18 de Hamilton. Autrement dit, pour chaque ligne « V » de cette table de vérité, nous construisons, à l'aide de la conjonction, une proposition qui n'est vraie que pour les valeurs de vérité correspondantes (des variables propositionnelles), puis nous prenons la disjonction de ces propositions intermédiaires. On obtient ainsi la FND

$$(p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)\,.$$

On obtiendra une FNC de $\mathcal{A}$ en appliquant la même technique à $\sim \mathcal{A}$, puis en passant à $\sim\sim \mathcal{A}$ (voir Corollaire 1.21 et Exemple 1.22).

Méthode 2 :
Nous travaillons avec des chaînes d'équivalences — voir les règles de manipulation et de substitution, Hamilton, §1.3 —, appliquant systématiquement la procédure suivante.

(i) Éliminer les occurrences du connecteur $\leftrightarrow$ à l'aide de l'équivalence

$$\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q} \quad \textit{éq} \quad (\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \to \mathcal{P})\,.$$

(ii) Éliminer les occurrences de $\to$ à l'aide de l'équivalence

$$\mathcal{P} \to \mathcal{Q} \quad \textit{éq} \quad (\sim \mathcal{P} \vee \mathcal{Q})\,.$$

(iii) Déplacer les occurrences du connecteur $\sim$ « vers l'intérieur », tout en en éliminant les doublons, à l'aide des équivalences

$$\begin{array}{rcl} \sim\sim \mathcal{P} & \textit{éq} & \mathcal{P}\,, \\ \sim (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) & \textit{éq} & \sim \mathcal{P} \wedge \sim \mathcal{Q}\,, \\ \sim (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) & \textit{éq} & \sim \mathcal{P} \vee \sim \mathcal{Q}\,. \end{array}$$

(iv) Appliquer les propriétés d'associativité et de distributivité des connecteurs $\wedge$ et $\vee$.

On observera que la forme propositionnelle résultant des étapes (i)–(iii) ne contient que les connecteurs $\sim$, $\wedge$ et $\vee$. On obtiendra une FND ou une FNC selon que l'on distribue $\wedge$ sur $\vee$, ou l'inverse.

Nous illustrons le procédé sur la proposition $\mathcal{A}$.

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \leftrightarrow \sim r \quad & \textit{éq} \quad ((p \to q) \to \sim r) \wedge (\sim r \to (p \to q))\,, & (1)\\
& \textit{éq} \quad (\sim (\sim p \vee q) \vee \sim r) \wedge (\sim\sim r \vee (\sim p \vee q))\,, & (2)\\
& \textit{éq} \quad ((\sim\sim p \wedge \sim q) \vee \sim r) \wedge (\sim\sim r \vee (\sim p \vee q))\,, & (3)\\
& \textit{éq} \quad ((p \wedge \sim q) \vee \sim r) \wedge (r \vee (\sim p \vee q))\,. & (4)
\end{aligned}
$$

Il s'agit maintenant de faire intervenir à tour de rôle la distributivité de $\wedge$ sur $\vee$ et la distributivité de $\vee$ sur $\wedge$. Il peut être utile à cet égard de se ramener à un contexte algébrique familier (où nous possédons de bons réflexes !). Nous écrivons, pour plus de commodité, $\bar{p}_i$ à la place de $\sim p_i$.

- **On distribue $\wedge$ sur $\vee$.**

  Remplaçant la conjonction $\wedge$ par la multiplication $\times$ et la disjonction $\vee$ par l'addition $+$, la ligne (4) devient

  $$(p\bar{q} + \bar{r})(r + \bar{p} + q) = p\bar{q}r + p\bar{q}\bar{p} + p\bar{q}q + \bar{r}r + \bar{r}\bar{p} + \bar{r}q\,.$$

  Or d'après le sens de la notation $\bar{p}_i$, chacun des termes faisant intervenir $p_i\bar{p}_i$ peut être éliminé — l'expression $p_i\bar{p}_i$ représente en effet la contradiction $p_i \wedge \sim p_i$, sorte d'élément neutre pour la disjonction (dans notre « lecture algébrique », on a $p_i\bar{p}_i = 0$). L'expression précédente devient donc

  $$p\bar{q}r + \bar{r}\bar{p} + \bar{r}q\,,$$

  de sorte qu'on obtient la FND

  $$(p \to q) \leftrightarrow \sim r \quad \textit{éq} \quad (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim r \wedge \sim p) \vee (\sim r \wedge q)\,.$$

  (Cette FND est bien sûr équivalente à la FND trouvée par la méthode 1, ce que l'on pourrait vérifier par exemple à l'aide de chaînes d'équivalences.)

- **On distribue $\vee$ sur $\wedge$.**

  Remplaçant la disjonction $\vee$ par la multiplication $\times$ et la conjonction $\wedge$ par l'addition $+$, la ligne (4) devient

  $$(p + \bar{q})\bar{r} + r(\bar{p}q) = p\bar{r} + \bar{q}\bar{r} + r\bar{p}q\,.$$

  Cela nous donne la FNC

  $$(p \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee \sim r) \wedge (r \vee \sim p \vee q)\,.$$