Quelques tautologies remarquables

Dans ce qui suit, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ représentent des propositions quelconques. $\top$ représente une tautologie quelconque (par exemple la proposition $p_1 \vee \sim p_1$) tandis que $\perp$ représente une contradiction (par exemple $p_1 \wedge \sim p_1$).

1. Tautologies exprimant l'équivalence de certaines propositions. (Ces tautologies peuvent notamment servir lors de la manipulation de « chaînes d'équivalences ».)

   (a) $\models \sim\sim \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{A}$ *double négation*

   (b) $\models \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$ *commutativité de la conjonction*

   (c) $\models \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{B} \vee \mathcal{A}$ *commutativité de la disjonction*

   (d) $\models (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ *associativité de la conjonction*

   (e) $\models (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ *associativité de la disjonction*

   (f) $\models \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \leftrightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$ *distributivité* $\wedge / \vee$

   (g) $\models \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \leftrightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$ *distributivité* $\vee / \wedge$

   (h) $\models (\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}) \leftrightarrow \mathcal{A}$ *idempotence de la conjonction*

   (i) $\models (\mathcal{A} \vee \mathcal{A}) \leftrightarrow \mathcal{A}$ *idempotence de la disjonction*

   (j) $\models \sim (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \leftrightarrow \sim \mathcal{A} \vee \sim \mathcal{B}$ *de Morgan*

   (k) $\models \sim (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \leftrightarrow \sim \mathcal{A} \wedge \sim \mathcal{B}$ *de Morgan*

   (l) $\models ((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \mathcal{A}) \leftrightarrow \mathcal{A}$ *absorption*

   (m) $\models ((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \leftrightarrow \mathcal{A}$ *absorption*

   (n) $\models (\mathcal{A} \wedge \top) \leftrightarrow \mathcal{A}$ *simplification*

   (o) $\models (\mathcal{A} \vee \perp) \leftrightarrow \mathcal{A}$ *simplification*

   (p) $\models (\mathcal{A} \wedge \perp) \leftrightarrow \perp$ *absorption*

   (q) $\models (\mathcal{A} \vee \top) \leftrightarrow \top$ *absorption*

   (r) $\models ((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \sim \mathcal{B}) \leftrightarrow (\mathcal{A} \vee \sim \mathcal{B})$

   (s) $\models ((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge \sim \mathcal{B}) \leftrightarrow (\mathcal{A} \wedge \sim \mathcal{B})$

   (t) $\models (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \leftrightarrow (\sim \mathcal{A} \vee \mathcal{B})$

   (u) $\models \sim (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \leftrightarrow (\mathcal{A} \wedge \sim \mathcal{B})$

   (v) $\models (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \leftrightarrow (\sim \mathcal{B} \rightarrow \sim \mathcal{A})$ *contraposition*

   (w) $\models (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \leftrightarrow ((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \leftrightarrow \mathcal{A})$

   (x) $\models ((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C}) \leftrightarrow (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}))$ *import-export*

   (y) $\models ((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C}) \leftrightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}))$

(z) $\models (\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \leftrightarrow ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C}))$ *distributivité* $\to$ / $\to$

(aa) $\models (\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) \leftrightarrow (\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{A})$ *commutativité du biconditionnel*

(bb) $\models ((\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) \leftrightarrow \mathcal{C}) \leftrightarrow (\mathcal{A} \leftrightarrow (\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{C}))$ *associativité du biconditionnel*

(cc) $\models (\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) \leftrightarrow ((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\sim \mathcal{A} \wedge \sim \mathcal{B}))$

(dd) $\models (\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) \leftrightarrow ((\sim \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \sim \mathcal{B}))$

(ee) $\models \sim (\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) \leftrightarrow (\mathcal{A} \leftrightarrow \sim \mathcal{B})$

2. Tautologies diverses.

(a) $\models \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *lapalissade*

(b) $\models \mathcal{A} \vee \sim \mathcal{A}$ *tiers exclu*

(c) $\models \sim (\mathcal{A} \wedge \sim \mathcal{A})$ *non-contradiction*

(d) $\models (\mathcal{A} \wedge \sim \mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ *contradiction*

(e) $\models \mathcal{A} \to (\sim \mathcal{A} \to \mathcal{B})$ *contradiction*

(f) $\models (\mathcal{A} \to \sim \mathcal{A}) \to \sim \mathcal{A}$

(g) $\models \sim (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{A}$

(h) $\models \sim (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \sim \mathcal{B}$

(i) $\models \sim (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$

(j) $\models (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \vee (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$

(k) $\models ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \wedge (\sim \mathcal{A} \to \mathcal{B})) \to \mathcal{B}$

(l) $\models ((\sim \mathcal{A} \to \mathcal{B}) \wedge (\sim \mathcal{A} \to \sim \mathcal{B})) \to \mathcal{A}$

(m) $\models \mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$ *conséquence merveilleuse*

(n) $\models ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ *loi de Peirce*

(o) $\models (\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \to \mathcal{B})) \to \mathcal{B}$ *modus ponens* (ou *modus ponendo ponens*)

(p) $\models (\sim \mathcal{B} \wedge (\mathcal{A} \to \mathcal{B})) \to \sim \mathcal{A}$ *modus tollendo tollens*

(q) $\models (\sim \mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})) \to \mathcal{B}$ *modus tollendo ponens* (ou *syllogisme disjonctif*)

(r) $\models (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C}))$ *syllogisme hypothétique*

(s) $\models \mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}))$ *adjonction*

(t) $\models (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{C}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}))$ *adjonction*

(u) $\models (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \to \mathcal{A}$ *simplification*

(v) $\models \mathcal{A} \to (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ *expansion*

(w) $\models ((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\sim \mathcal{A} \vee \mathcal{C})) \to (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ *coupure*

(x) $\models (\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to ((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \to \mathcal{C})$ *renforcement de l'antécédent*

(y) $\models (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}))$ *affaiblissement du conséquent*

(z) $\models (\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \leftrightarrow \sim \mathcal{B})$