Réponses détaillées à certains exercices du chapitre 1

Numéro 11. On considère l'expression :
$x = (((((((0{,}1\times10^{0}+0{,}1\times10^{-3})+0{,}4\times10^{-3})+0{,}2\times10^{-3})+0{,}1\times10^{-3})+0{,}2\times10^{-3})+0{,}1\times10^{-3})$

a) Calculer la valeur de x en arithmétique exacte, puis en arithmmétique flottante à 3 chiffres avec arrondi, en respectant l'ordre prescrit par les parenthèses. Expliquer la différence entre les résultats. Déterminer l'erreur relative.

b) Proposer une modification de l'ordre de sommation qui permette d'obtenir une réponse plus précise en arithmétique flottante à 3 chiffres. Valider votre réponse en calculant de nouveau l'erreur relative.

Solution

a) En arithmétique exacte, les parenthèses ne sont pas importantes. On a donc que :
$x = 0{,}1 \times 10^{0} + 0{,}4 \times 10^{-3} + 0{,}2 \times 10^{-3} + 0{,}1 \times 10^{-3} + 0{,}2 \times 10^{-3} + 0{,}1 \times 10^{-3}$
Puisque $0{,}1 \times 10^{0} = 100 \times 10^{-3}$, on obtient que :
$x = (100 + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1) \times 10^{-3} = 101{,}1 \times 10^{-3}$
La valeur exacte est donc $x = 0{,}1011$.

N.B. :En arithmétique flottante à 3 chiffres, on fait chaque opération et on ramène le résultat à trois chiffres si nécessaire à chacune des étapes. On obtient la suite des valeurs suivantes pour chacune des parenthèses.

- $0{,}100 \times 10^{0} + 0{,}100 \times 10^{-3}$
  On décale la mantisse du nombre ayant le plus petit exposant :
  $= 0{,}100 \times 10^{0} + 0{,}000100 \times 10^{0} = 0{,}100100 \times 10^{0}$.
  $\mathrm{fl}(0{,}100100 \times 10^{0}) = 0{,}100 \times 10^{0}$.
- $0{,}100 \times 10^{0} + 0{,}400 \times 10^{-3}$
  On décale la mantisse du nombre ayant le plus petit exposant :
  $= 0{,}100 \times 10^{0} + 0{,}000400 \times 10^{0} = 0{,}100400 \times 10^{0}$
  $\mathrm{fl}(0{,}100400 \times 10^{0}) = 0{,}100 \times 10^{0}$
- $0{,}100 \times 10^{0} + 0{,}200 \times 10^{-3}$
  On décale la mantisse du nombre ayant le plus petit exposant :
  $= 0{,}100 \times 10^{0} + 0{,}000200 \times 10^{0} = 0{,}100200 \times 10^{0}$
  $\mathrm{fl}(0{,}100200 \times 10^{0}) = 0{,}100 \times 10^{0}$.
- $0{,}100 \times 10^{0} + 0{,}100 \times 10^{-3}$
  On décale la mantisse du nombre ayant le plus petit exposant :
  $= 0{,}100 \times 10^{0} + 0{,}000100 \times 10^{0} = 0{,}100100 \times 10^{0}$
  $\mathrm{fl}(0{,}100100) = 0{,}100 \times 10^{0}$.

– $0{,}100 \times 10^0 + 0{,}200 \times 10^{-3}$
  On décale la mantisse du nombre ayant le plus petit exposant :
  $= 0{,}100 \times 10^0 + 0{,}000200 \times 10^0 = 0{,}100200 \times 10^0$
  $\text{fl}(0{,}100200 \times 10^0) = 0{,}100 \times 10^0$.
– $0{,}100 \times 10^0 + 0{,}100 \times 10^{-3}$
  On décale la mantisse du nombre ayant le plus petit exposant :
  $= 0{,}100 \times 10^0 + 0{,}000100 \times 10^0 = 0{,}100100 \times 10^0$
  $\text{fl}(0{,}100100 \times 10^0) = 0{,}100 \times 10^0$.

Donc, $x_{approx} = 0{,}100$ et l'erreur relative est donnée par :
$E_r(x) = \dfrac{|x - x_{approx}|}{|x|} = \dfrac{|0{,}1011 - 0{,}100|}{|0{,}1011|} = 0{,}01 = 1\%$.

b) On somme plutôt de droite à gauche.
$x = (0{,}1 \times 10^0 + (0{,}1 \times 10^{-3} + (0{,}4 \times 10^{-3} + (0{,}2 \times 10^{-3} + (0{,}1 \times 10^{-3} + (0{,}2 \times 10^{-3} + 0{,}1 \times 10^{-3})))))$

– $0{,}200 \times 10^{-3} + 0{,}100 \times 10^{-3} = 0{,}300 \times 10^{-3}$.
– $0{,}100 \times 10^{-3} + 0{,}300 \times 10^{-3} = 0{,}400 \times 10^{-3}$.
– $0{,}200 \times 10^{-3} + 0{,}400 \times 10^{-3} = 0{,}600 \times 10^{-3}$.
– $0{,}400 \times 10^{-3} + 0{,}600 \times 10^{-3} = 1{,}000 \times 10^{-3}$.
  $\text{fl}(1{,}000 \times 10^{-3}) = 0{,}100 \times 10^{-2}$
– $0{,}100 \times 10^{-3} + 0{,}100 \times 10^{-2}$
  On décale la mantisse du nombre ayant le plus petit exposant :
  $= 0{,}0100 \times 10^{-2} + 0{,}100 \times 10^{-2} = 0{,}1100 \times 10^{-2}$
  $\text{fl}(0{,}1100 \times 10^{-2}) = 0{,}110 \times 10^{-2}$.
– $0{,}100 \times 10^0 + 0{,}110 \times 10^{-2} = 0{,}100 \times 10^0 + 0{,}00110 \times 10^0 = 0{,}10110 \times 10^0$.
– $\text{fl}(0{,}10110 \times 10^0) = 0{,}101 \times 10^0$.

On obtient alors que $x_{approx} = 0{,}101 \times 10^0$. Cette fois, l'erreur relative
$E_r(x) = \dfrac{|x - x_{approx}|}{|x|} = \dfrac{|0{,}1011 - 0{,}101|}{|0{,}1011|} \simeq 0{,}001$ est de $0{,}1\%$.

Numéro 24. Dans la revue *Science & Vie*[15] de septembre 1996, on fournit les données suivantes pour le satellite Titania d'Uranus :

$$\text{Rayon} : R = 800000 \pm 5000m$$
$$\text{Densité} : \rho = 1590 \pm 90\frac{kg}{m^3}$$

a) Donner lenombre de chiffres significatifs du rayon R et de la densité ρ.

b) En supposant que Titania soit parfaitement sphérique (de volume $V = \frac{4\pi R^3}{3}$), trouver une approximation de la masse de Titania et donner le nombre de chiffres significatifs de votre résultat.

Solution

a) $\Delta R = 5000 \leq 0,5 \times 10^4$
Le chiffre à la position 10^4 est le dernier chiffre significatif.
$R = 8\mathbf{0}0000 \qquad \Rightarrow \boxed{\text{2 c.s.}}$

$\Delta\rho = 90 = 0,9 \times 10^2 \leq 0,5 \times 10^3$
Le chiffre à la position 10^3 est le dernier chiffre significatif.
$\rho = \mathbf{1}590 \qquad \boxed{\text{1 c.s.}}$

b) On a que la masse m est donnée par $m = \rho V = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}$

L'incertitude sur une fonction de plusieurs variables $f(x_1, ..., x_n)$ est donnée par :
$\Delta f \simeq \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + ... + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \Delta x_n$. L'incertitude sur la masse est donc :
$\Delta m \simeq \left|\frac{\partial m}{\partial R}\right| \Delta R + \left|\frac{\partial m}{\partial \rho}\right| \Delta\rho = \left|\frac{4}{3} \times 3\pi R^2 \rho\right| \Delta R + \left|\frac{4\pi R^3}{3}\right| \Delta\rho$
$= 4\pi R^2 \left[\rho\Delta R + \frac{R\Delta\rho}{3}\right] = 4\pi(800000)^2 \left[1590 \times 5000 + \frac{800000 \times 90}{3}\right]$
$= 2,5695 \times 10^{20} = \boxed{0,25695 \times 10^{21} \text{ kg} = \Delta m}$

D'autre part, on a que :
$m = \rho V = \frac{4}{3}\pi(800000)^3 \times 1590 = 3,410\,010\,21 \times 10^{21}$ kg

Puisque l'on a $\Delta m \simeq 0,256 \times 10^{21}$ kg $\leq 0,5 \times 10^{21}$ kg, on peut donc considérer 10^{21} kg

comme les unités. On a donc $\Delta m \leq$ 0,5 $\times 10^0 (10^{21}$ kg) et $m = \mathbf{3}$,41001$(10^{21}$ kg).
Par conséquent le chiffre des unités est le dernier chiffre significatif.

Numéro 31.

a) Calculer le développement de Taylor d'ordre 5, c'est-à-dire dont le terme d'erreur est de type $O(h^5)$, de la fonction $f(x) = \ln(x)$ autour de $x_0 = 1$. Donner l'expression analytique du terme d'erreur.

b) À l'aide de ce développement, donner une approximation de ln(1,1). Par comparaison avec la valeur exacte ($\ln(1{,}1) = 0{,}095\,310\,1798$), donner le nombre de chiffres significatifs de l'approximation.

c) Par quel facteur approximatif l'erreur obtenue en b) serait-elle réduite si l'on évaluait ln(1,025) au moyen du développement de Taylor obtenu en a) ? (Ne pas faire les calculs.)

Solution

On a premièrement que :

$$\begin{array}{rclrcl} f(x) &=& \ln x & f(1) &=& 0 \\ f'(x) &=& x^{-1} & f'(1) &=& 1 \\ f''(x) &=& -x^{-2} & f''(1) &=& -1 \\ f'''(x) &=& 2x^{-3} & f'''(1) &=& 2 \\ f^{iv}(x) &=& -6x^{-4} & f^{iv}(1) &=& -6 \\ f^{v}(x) &=& 24x^{-5} & f^{v}(\xi) &=& 24\xi^{-5} \end{array}$$

a) Le développement de Taylor de la fonction $f(x) = \ln(x)$ autour de $x_0 = 1$ dont le terme d'erreur est de type $O(h^5)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\tfrac{h^2}{2!} + f'''(x_0)\tfrac{h^3}{3!} + f^{IV}(x_0)\tfrac{h^4}{4!} + +f^{V}(\xi)\tfrac{h^5}{5!}) \\ \text{d'où :} \\ \ln(1+h) &= 0 + h - \frac{h^2}{2} + \frac{2h^3}{3!} - \frac{6h^4}{4!} + \frac{24}{\xi^5}\frac{h^5}{5!} \\ &= h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5\xi^5} \end{aligned}$$

Puisque dans le cas général, $x_0 < \xi < x_0 + h$, on a donc que $1 < \xi < 1 + h$.

Finalement, l'expression analytique de l'erreur est donnée par : $R_5(h) = \dfrac{h^5}{5\xi^5}$

b) On utilise le développement de Taylor en posant $h = 0{,}1$:

$\ln(1{,}1) = \ln(1 + 0{,}1) = 0{,}1 - \dfrac{0{,}01}{2} + \dfrac{0{,}001}{3} - \dfrac{0{,}0001}{4} = 0{,}095\,308\,333$

Le terme d'erreur est donné par :

$0{,}095\,310\,1798 - 0{,}095\,308\,333 \simeq 0{,}1846 \times 10^{-5} < 0{,}5 \times 10^{-5}$

Par conséquent, on a $\ln(1{,}1) \simeq 0{,}095\,\mathbf{30}8\,333$ 4 chiffres significatifs.

c) Pour évaluer $\ln(1{,}025)$, on pose $h_1 = 0{,}025$. On obtient donc h_1 en divisant h par 4. Le terme d'erreur étant en $O(h^5)$, le terme d'erreur passera approximativement à $O((h/4)^5)$ l'erreur sera divisée par $4^5 = 1024$.

Numéro 37. Si $f(x) = \sqrt{4+x}$:

a) Trouver le développement de Taylor de degré 2 ($P_2(x)$), de la fonction $f(x)$ au voisinage de $x_0 = 0$.

b) En utilisant $P_2(x)$, donner une approximation de $\sqrt{3{,}9}$. En utilisant la valeur «exacte» de $\sqrt{3{,}9}$, (donnée par votre calculatrice par exemple), estimer l'erreur absolue et l'erreur relative commises.

c) Quels sont les chiffres significatifs de l'approximation obtenue en a) ?

Solution

a) Il s'agit ici du développement de Taylor de **degré** 2 (et non d'**ordre** 2). L'ordre de ce développement sera au moins 3. Les dérivées première et seconde de la fonction $f(x)$ sont :

$$\begin{array}{rclrcl} f(x) & = & \sqrt{4+x} & f(0) & = & \sqrt{4} = 2 \\ f'(x) & = & \dfrac{1}{2\sqrt{4+x}} & f'(0) & = & \dfrac{1}{4} \\ f''(x) & = & -\dfrac{1}{4(4+x)^{3/2}} & f''(0) & = & -\dfrac{1}{32} \end{array}$$

Puisque $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$, on a :

$$\sqrt{4+x} \approx P_2(x) = 2 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{64}$$

b) Pour obtenir une approximation de $\sqrt{3{,}9}$, on pose $x = -0{,}1$ et on obtient :

$$\sqrt{3{,}9} \approx P_2(-0{,}1) = 2 + \frac{(-0{,}1)}{4} - \frac{(-0{,}1)^2}{64} = 1{,}974\,8\mathbf{4}3\,75.$$

La valeur exacte donnée par Matlab est 1,974 841 765 813 15 et on en déduit que l'erreur absolue est environ $0,198 \times 10^{-5}$. L'erreur relative est, quant à elle, autour de $0,100 \times 10^{-5}$.

N.B. : Se référer aux définitions de l'erreur absolue et de l'erreur relative.

c) Puisque l'erreur absolue satisfait $E \leq 0{,}5 \times 10^{-5}$, le chiffre en position 10^{-5} et ceux qui sont à sa gauche sont significatifs. On retiendra donc l'approximation $\sqrt{3{,}9} \approx 1,974\,84$.