Corrigé de l'EXAMEN 1

MAT-18996: Analyse numérique pour l'ingénieur Hiver 2009

Question 1. (20 points)

L'équation $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ peut être ramenée de plusieurs façons à un problème de point fixe $x = g(x)$. Considérons les 3 algorithmes suivants du point fixe:

(i)

$$x_{n+1} = -x_n^3 + 3x_n^2 - 2 \; = \; g_1(x_n)$$

(ii)

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1 + \dfrac{2}{x_n}}{3} \; = \; g_2(x_n)$$

(iii)

$$x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n^2 + 2x_n + 2 \; = \; g_3(x_n)$$

a) [3 pts] Montrer que $\bar{x} = 2$ est un point fixe pour chacune des méthodes ci-dessus.

Réponse:

Le $\bar{x} = 2$ est un point fixe de $g_1(x)$ car

$$g_1(2) = -\mathbf{2}^3 + 3 * \mathbf{2}^2 - 2 = -8 + 3 * 4 - 2 = -10 + 12 = \mathbf{2}.$$

Le $\bar{x} = 2$ est un point fixe de $g_2(x)$ car

$$g_2(2) = \frac{\mathbf{2}^2 + 1 + \dfrac{2}{\mathbf{2}}}{3} = \frac{6}{3} = \mathbf{2}.$$

Le $\bar{x} = 2$ est un point fixe de $g_3(x)$ car

$$g_3(2) \; = \; \mathbf{2}^3 - 3 * \mathbf{2}^2 + 2 * \mathbf{2} + 2 \; = \; 8 - 12 + 4 + 2 = \mathbf{2}.$$

b) [9 pts] Sans calculer d'itération, faites l'étude de la convergence pour chacune des trois méthodes ci-dessus: déterminer si la méthode est convergente ou non, identifier le type de convergence (linéaire ou quadratique) lorsque la convergence a lieu, et le taux de convergence le cas échéant.

Réponse:

Traitement de $g_1(x)$:

$g_1'(x) = -3x^2 + 6x$ alors $g_1'(2) = -3 * \mathbf{2}^2 + 6 * \mathbf{2} = -12 + 12 = \mathbf{0}$

Donc, la méthode est convergente car $|g_1'(\bar{x})| = |g_1'(2)| < 1$

De plus, $g_1''(x) = -6x + 6$ alors $g_1''(2) = -6 * \mathbf{2} + 6 = \mathbf{-6}$; $|g_1''(2)| = \mathbf{6}$

Donc, la convergence est quadratique.

Traitement de $g_2(x)$:

$g_2'(x) = \frac{2x}{3} - \frac{2}{3x^2}$ alors $g_2'(2) = \frac{2 * \mathbf{2}}{3} - \frac{2}{3 * \mathbf{2}^2} = \frac{4}{3} - \frac{2}{12} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}$

Donc, la méthode est divergente car $g_2'(\bar{x}) = g_2'(2) > 1$

Traitement de $g_3(x)$:

$g_3'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ alors $g_3'(2) = 3 * \mathbf{2}^2 - 6 * \mathbf{2} + 2 = 12 - 12 + 2 = \mathbf{2}$

Donc, la méthode est divergente car $g_3'(\bar{x}) = g_3'(2) > 1$

c) [3 pts] Donnez un 4ème algorithme de point fixe (sans en faire l'étude).

Réponse:
Il y a plusieurs réponses possibles. Une parmi elles serait:

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^3 + x_n + 2}{3}}$$

On remarque que $\bar{x} = 2$ n'est pas le point fixe de cet algorithme.

d) [2 pts] Pour le premier algorithme, c'est-à-dire $x_{n+1} = -x_n^3 + 3x_n^2 - 2$, calculer la **première** itération de l'algorithme de Steffenson à partir de $x_0 = 1$.

Réponse:

Étape 1:

Algo de Steffenson est donné par $\begin{cases} x_1 = g(x_0) \\ x_2 = g(x_1) \\ x_{Steff} = x_0 - \dfrac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} \end{cases}$

Étape 2:

Donc, pour $x_0 = 1$, $\begin{cases} x_1 = g_1(1) = -1 + 3 - 2 = \mathbf{0} \\ x_2 = g(0) = -0 + 0 - 2 = -\mathbf{2} \\ x_{Steff} = 1 - \dfrac{(0-1)^2}{-2 - 2 * 0 + 1} = 1 - \dfrac{1}{-1} = \mathbf{2} \end{cases}$

e) [3 pts] Expliciter la méthode de Newton appliquée à l'équation $x^3-3x^2+x+2=0$ et calculer la **première** itération à partir de $x_0=1$.

Identifier $f(x)$: $f(x)=x^3-3x^2+x+2$

Écrire l'algo de Newton: $\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$

Calcul de $f'(x)$: $f'(x)=3x^2-6x+1$

Donc, l'algo de Newton est: $\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^3-3x_n^2+x_n+2}{3x_n^2-6x_n+1} \end{cases}$

Calcul à partir de $x_0=1$

$$\begin{cases} x_0=1 \\ x_1=x_0-\dfrac{x_0^3-3x_0^2+x_0+2}{3x_0^2-6x_0+1}=1-\dfrac{1^3-3*1^2+1+2}{3*1^2-6*1+1}=1-\dfrac{1}{-2}=\mathbf{\dfrac{3}{2}} \end{cases}$$

Question 2. (16 points)

On désire approcher la racine $\bar{x}$ située entre 2.5 et 2.8 de l'équation

$$f(x) = 0.$$

L'application de la méthode de Newton a produit les itérés suivants:

n	x_n
4	2.61421
5	2.62453
6	2.63151
7	2.63621
8	2.63937
9	2.64149

a) [12 pts] Déterminer l'ordre de convergence de l'algorithme pour la racine $\bar{x}$. On utilisera la définition suivante de l'erreur : $e_n = |x_n - x_{n+1}|$

Réponse:

Construction des e_n:
$e_4 = |x_4 - x_5| = |2.61421 - 2.62453| = \mathbf{0.01032}$
$e_5 = |x_5 - x_6| = |2.62453 - 2.63151| = \mathbf{0.00698}$
$e_6 = |x_6 - x_7| = |2.63151 - 2.63621| = \mathbf{0.0047}$
$e_7 = |x_7 - x_8| = |2.63621 - 2.63937| = \mathbf{0.00316}$
$e_8 = |x_8 - x_9| = |2.63937 - 2.64149| = \mathbf{0.00212}$

Construction des $\dfrac{e_{n+1}}{e_n}$:

$$\frac{e_5}{e_4} = \frac{0.00698}{0.01032} = \mathbf{0.67635658914728}$$
$$\frac{e_6}{e_5} = \frac{0.0047}{0.00698} = \mathbf{0.67335243553011}$$
$$\frac{e_7}{e_6} = \frac{0.00316}{0.0047} = \mathbf{0.67234042553186}$$
$$\frac{e_8}{e_7} = \frac{0.00212}{0.00316} = \mathbf{0.67088607594944}$$

Discussion sur l'ordre de convergence:

Le quotient $\dfrac{e_{n+1}}{e_n}$ semble converger vers $\mathbf{0.67}$.

Comme $|g'(\bar{x})| \approx \dfrac{e_{n+1}}{e_n} \approx 0.67$ alors **la convergence est linéaire**.

De plus, **le taux de convergence** est donné par $|g'(\bar{x})|$ et, par conséquent, il **est de 0.67**.

b) [4 pts] Que peut-on dire de la multiplicité de la racine? Justifier.

Réponse:

Pour la méthode de Newton, on a que

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} \approx |g'(\bar{x})| = g'(\bar{x}) = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m}}$$

où m est la multiplicité de la racine $\bar{x}$.

Comme $g'(\bar{x}) \approx \mathbf{0.67} \approx \mathbf{1} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{m}}$

on a que $\dfrac{2}{3} \approx 1 - \dfrac{1}{m}$ d'où $\mathbf{m = 3}$.

Donc, la racine $\bar{x}$ est de **multiplicité 3**.

Question 3. (16 points)

On considère le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

que l'on veut résoudre par la méthode de factorisation LU donnée par Crout. On notera les éléments des matrices L et U respectivement par l_{ij} et u_{ij} avec $i, j = 1, 2, 3$.

a) [10 pts] Sachant que $l_{22} = -1$ et $u_{12} = -2$, compléter le calcul de la factorisation de la matrice du système tout en tenant compte de la structure particulière de la matrice.

b) [6 pts] Utiliser cette factorisation pour résoudre le système linéaire.

Réponse:

a) En mettant à profit la structure bande de A, on obtient :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) On résout d'abord $Ly = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. On trouve

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On résout ensuite $Ux = y$. On trouve

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Question 4. (16 points)

On considère le système linéaire

$$A\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1.01 \\ 1.01 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.005 \\ 1.005 \end{pmatrix} = \mathbf{b}.$$

a) [3 pts] Déterminer la solution exacte $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ du système linéaire.

b) [2 pts] Calculer le résidu correspondant à l'approximation $\hat{\mathbf{x}} = (-4.5, 5.5)$.

c) [8 pts] Trouver une borne inférieure du conditionnement de A en utilisant la norme infinie.

d) [3 pts] La valeur du conditionnement est-elle affectée si l'on change le second membre du système linéaire par $\mathbf{b} = (-1, 1)$? Justifier.

Question 5. (16 points)

a) [6 pts] Écrire la méthode de Newton pour résoudre le système

$$\begin{aligned} 3\,x^2 + x\,y - 1 &= 0 \\ x\,y^2 + 4\,y + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Réponse:

$X = (x, y)^t$, $F(X) = (3\,x^2 + x\,y - 1, x\,y^2 + 4\,y + 4)^t$
$X_{n+1} = X_n + \Delta X$ où ΔX est la solution de $J(X_n)\Delta X = -F(X_n)$ et $J(X)$ est le jacobien de F en X.

$$J(X) = \begin{pmatrix} 6x + y & x \\ y^2 & 2xy + 4 \end{pmatrix}$$

b) [6 pts] Effectuer une itération en partant de $(0, 1)$.

Réponse:

$X_0 = (0, 1)^t$, $F(X_0) = (-1, 8)$

$$J(X_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Delta X = (1, -9/4)^t$
$X_1 = (1, -5/4)^t$

c) [4 pts] Peut-on prendre comme point initial $(0, 0)$? Expliquer.

Réponse:

$X_0 = (0, 0)^t$

$$J(X_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$J(X_0)$ n'est pas inversible (car le déterminant est nul, par exemple), ΔX n'est donc pas uniquement défini.

Question 6. (16 points)

Soit $f(x) = \ln(1+x)$.

a) [6 pts] Trouver le développement de Taylor $P_2(x)$ de degré 2 de la fonction $f(x)$ au voisinage de $x_0 = 0$.

Réponse:

$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + ...$
Ou $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + ...$
Donc $P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$,$f'(x_0) = 1$, $f''(x_0) = -1$

$P_2(x) = x - x^2/2$

b) [4 pts] En utilisant $P_2(x)$, calculer une approximation de $\ln(1.1)$.

Réponse:

$\ln(1.1) \approx P_2(0.1) = 0.1 - 0.005 = 0.095$

c) [6 pts] À l'aide de la formule d'erreur de Taylor, estimer l'erreur commise et la comparer avec la valeur exacte de l'erreur fournie par votre calculatrice.

Réponse:

$f(x) = P_2(x) + R_2(x)$ où $R_2(x) = \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(\xi)$ et ξ compris entre x_0 et x.

Ici, $x_0 = 0$, $x = 0.1$, et $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ donc

$$R_2(x) = \frac{0.1^3}{3!}\frac{2}{(1+\xi)^3}$$

Comme $0 \le \xi \le 0.1$, $1 \le 1+\xi \le 1.1$, donc $1 \le (1+\xi)^3 \le 1.1^3$ et

$$\frac{1}{(1+\xi)^3} \le 1$$

D'où

$$|R_2(0.1)| \leq \frac{10^{-3}}{3}$$

La calculatrice donne $\ln(1.1) \approx 0.0953101798$, donc l'erreur est environ 3.101798×10^{-4} ce qui est bien inférieur à $\frac{10^{-3}}{3} \approx 3.333333 \times 10^{-4}$.