

# Corrigé de l'EXAMEN 1

MAT-18996: Analyse numérique pour l'ingénieur

Hiver 2009

## Question 1. (20 points)

L'équation  $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$  peut être ramenée de plusieurs façons à un problème de point fixe  $x = g(x)$ . Considérons les 3 algorithmes suivants du point fixe:

(i)

$$x_{n+1} = -x_n^3 + 3x_n^2 - 2 = g_1(x_n)$$

(ii)

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1 + \frac{2}{x_n}}{3} = g_2(x_n)$$

(iii)

$$x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n^2 + 2x_n + 2 = g_3(x_n)$$

a) [3 pts] Montrer que  $\bar{x} = 2$  est un point fixe pour chacune des méthodes ci-dessus.

**Réponse:**

Le  $\bar{x} = 2$  est un point fixe de  $g_1(x)$  car

$$g_1(2) = -2^3 + 3 * 2^2 - 2 = -8 + 3 * 4 - 2 = -10 + 12 = 2.$$

Le  $\bar{x} = 2$  est un point fixe de  $g_2(x)$  car

$$g_2(2) = \frac{2^2 + 1 + \frac{2}{2}}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Le  $\bar{x} = 2$  est un point fixe de  $g_3(x)$  car

$$g_3(2) = 2^3 - 3 * 2^2 + 2 * 2 + 2 = 8 - 12 + 4 + 2 = 2.$$

- b) [9 pts] Sans calculer d'itération, faites l'étude de la convergence pour chacune des trois méthodes ci-dessus: déterminer si la méthode est convergente ou non, identifier le type de convergence (linéaire ou quadratique) lorsque la convergence a lieu, et le taux de convergence le cas échéant.

**Réponse:**

**Traitement de  $g_1(x)$ :**

$$g_1'(x) = -3x^2 + 6x \text{ alors } g_1'(2) = -3 * 2^2 + 6 * 2 = -12 + 12 = 0$$

Donc, la méthode est convergente car  $|g_1'(\bar{x})| = |g_1'(2)| < 1$

$$\text{De plus, } g_1''(x) = -6x + 6 \text{ alors } g_1''(2) = -6 * 2 + 6 = -6 ; |g_1''(2)| = 6$$

Donc, la convergence est quadratique.

**Traitement de  $g_2(x)$ :**

$$g_2'(x) = \frac{2x}{3} - \frac{2}{3x^2} \text{ alors } g_2'(2) = \frac{2 * 2}{3} - \frac{2}{3 * 2^2} = \frac{4}{3} - \frac{2}{12} = \frac{7}{6}$$

Donc, la méthode est divergente car  $g_2'(\bar{x}) = g_2'(2) > 1$

**Traitement de  $g_3(x)$ :**

$$g_3'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \text{ alors } g_3'(2) = 3 * 2^2 - 6 * 2 + 2 = 12 - 12 + 2 = 2$$

Donc, la méthode est divergente car  $g_3'(\bar{x}) = g_3'(2) > 1$

c) [3 pts] Donnez un 4ème algorithme de point fixe (sans en faire l'étude).

**Réponse:**

Il y a plusieurs réponses possibles. Une parmi elles serait:

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^3 + x_n + 2}{3}}$$

On remarque que  $\bar{x} = 2$  n'est pas le point fixe de cet algorithme.

d) [2 pts] Pour le premier algorithme, c'est-à-dire  $x_{n+1} = -x_n^3 + 3x_n^2 - 2$ , calculer la **première** itération de l'algorithme de Steffenson à partir de  $x_0 = 1$ .

**Réponse:**

Étape 1:

$$\text{Algo de Steffenson est donné par } \begin{cases} x_1 = g(x_0) \\ x_2 = g(x_1) \\ x_{Steff} = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} \end{cases}$$

Étape 2:

$$\text{Donc, pour } x_0 = 1, \begin{cases} x_1 = g_1(1) = -1 + 3 - 2 = \mathbf{0} \\ x_2 = g(0) = -0 + 0 - 2 = \mathbf{-2} \\ x_{Steff} = 1 - \frac{(0 - 1)^2}{-2 - 2 * 0 + 1} = 1 - \frac{1}{-1} = \mathbf{2} \end{cases}$$

e) [3 pts] Expliciter la méthode de Newton appliquée à l'équation  $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$  et calculer la **première** itération à partir de  $x_0 = 1$ .

Identifier  $f(x)$ :  $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$

Écrire l'algorithme de Newton: 
$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Calcul de  $f'(x)$ :  $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

Donc, l'algorithme de Newton est: 
$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n^2 + x_n + 2}{3x_n^2 - 6x_n + 1} \end{cases}$$

Calcul à partir de  $x_0 = 1$

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - 3x_0^2 + x_0 + 2}{3x_0^2 - 6x_0 + 1} = 1 - \frac{1^3 - 3 * 1^2 + 1 + 2}{3 * 1^2 - 6 * 1 + 1} = 1 - \frac{1}{-2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

**Question 2. (16 points)**

On désire approcher la racine  $\bar{x}$  située entre 2.5 et 2.8 de l'équation

$$f(x) = 0.$$

L'application de la méthode de Newton a produit les itérés suivants:

$n$	$x_n$
4	2.61421
5	2.62453
6	2.63151
7	2.63621
8	2.63937
9	2.64149

- a) [12 pts] Déterminer l'ordre de convergence de l'algorithme pour la racine  $\bar{x}$ . On utilisera la définition suivante de l'erreur :  $e_n = |x_n - x_{n+1}|$

**Réponse:**

**Construction des  $e_n$ :**

$$e_4 = |x_4 - x_5| = |2.61421 - 2.62453| = \mathbf{0.01032}$$

$$e_5 = |x_5 - x_6| = |2.62453 - 2.63151| = \mathbf{0.00698}$$

$$e_6 = |x_6 - x_7| = |2.63151 - 2.63621| = \mathbf{0.0047}$$

$$e_7 = |x_7 - x_8| = |2.63621 - 2.63937| = \mathbf{0.00316}$$

$$e_8 = |x_8 - x_9| = |2.63937 - 2.64149| = \mathbf{0.00212}$$

**Construction des  $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ :**

$$\frac{e_5}{e_4} = \frac{0.00698}{0.01032} = \mathbf{0.67635658914728}$$

$$\frac{e_6}{e_5} = \frac{0.0047}{0.00698} = \mathbf{0.67335243553011}$$

$$\frac{e_7}{e_6} = \frac{0.00316}{0.0047} = \mathbf{0.67234042553186}$$

$$\frac{e_8}{e_7} = \frac{0.00212}{0.00316} = \mathbf{0.67088607594944}$$

$$\frac{e_9}{e_8} = \frac{0.00212}{0.00316} = \mathbf{0.67088607594944}$$

**Discussion sur l'ordre de convergence:**

Le quotient  $\frac{e_{n+1}}{e_n}$  semble converger vers **0.67**.

Comme  $|g'(\bar{x})| \approx \frac{e_{n+1}}{e_n} \approx 0.67$  alors **la convergence est linéaire**.

De plus, **le taux de convergence** est donné par  $|g'(\bar{x})|$  et, par conséquent, il **est de 0.67**.

b) [4 pts] Que peut-on dire de la multiplicité de la racine? Justifier.

**Réponse:**

Pour la méthode de Newton, on a que

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} \approx |g'(\bar{x})| = g'(\bar{x}) = 1 - \frac{1}{m}$$

où  $m$  est la multiplicité de la racine  $\bar{x}$ .

Comme  $g'(\bar{x}) \approx 0.67 \approx 1 - \frac{1}{m}$

on a que  $\frac{2}{3} \approx 1 - \frac{1}{m}$  d'où  **$m = 3$** .

Donc, la racine  $\bar{x}$  est de **multiplicité 3**.

**Question 3. (16 points)**

On considère le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

que l'on veut résoudre par la méthode de factorisation  $LU$  donnée par Crout. On notera les éléments des matrices  $L$  et  $U$  respectivement par  $l_{ij}$  et  $u_{ij}$  avec  $i, j = 1, 2, 3$ .

- a) [10 pts] Sachant que  $l_{22} = -1$  et  $u_{12} = -2$ , compléter le calcul de la factorisation de la matrice du système tout en tenant compte de la structure particulière de la matrice.
- b) [6 pts] Utiliser cette factorisation pour résoudre le système linéaire.

**Réponse:**

- a) En mettant à profit la structure bande de  $A$ , on obtient :

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) On résout d'abord  $Ly = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ . On trouve

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On résout ensuite  $Ux = y$ . On trouve

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Question 4. (16 points)**

On considère le système linéaire

$$A \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1.01 \\ 1.01 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.005 \\ 1.005 \end{pmatrix} = \mathbf{b}.$$

- a) [3 pts] Déterminer la solution exacte  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  du système linéaire.
- b) [2 pts] Calculer le résidu correspondant à l'approximation  $\hat{\mathbf{x}} = (-4.5, 5.5)$ .
- c) [8 pts] Trouver une borne inférieure du conditionnement de  $A$  en utilisant la norme infinie.
- d) [3 pts] La valeur du conditionnement est-elle affectée si l'on change le second membre du système linéaire par  $\mathbf{b} = (-1, 1)$ ? Justifier.



**Question 5. (16 points)**

a) [6 pts] Écrire la méthode de Newton pour résoudre le système

$$\begin{aligned}3x^2 + xy - 1 &= 0 \\ xy^2 + 4y + 4 &= 0.\end{aligned}$$

**Réponse:**

$X = (x, y)^t$ ,  $F(X) = (3x^2 + xy - 1, xy^2 + 4y + 4)^t$   
 $X_{n+1} = X_n + \Delta X$  où  $\Delta X$  est la solution de  $J(X_n)\Delta X = -F(X_n)$  et  $J(X)$  est le jacobien de  $F$  en  $X$ .

$$J(X) = \begin{pmatrix} 6x + y & x \\ y^2 & 2xy + 4 \end{pmatrix}$$

b) [6 pts] Effectuer une itération en partant de  $(0, 1)$ .

**Réponse:**

$$X_0 = (0, 1)^t, F(X_0) = (-1, 8)$$

$$J(X_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta X = (1, -9/4)^t$$

$$X_1 = (1, -5/4)^t$$

c) [4 pts] Peut-on prendre comme point initial  $(0, 0)$ ? Expliquer.

**Réponse:**

$$X_0 = (0, 0)^t$$

$$J(X_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$J(X_0)$  n'est pas inversible (car le déterminant est nul, par exemple),  $\Delta X$  n'est donc pas uniquement défini.

**Question 6. (16 points)**

Soit  $f(x) = \ln(1+x)$ .

- a) [6 pts] Trouver le développement de Taylor  $P_2(x)$  de degré 2 de la fonction  $f(x)$  au voisinage de  $x_0 = 0$ .

**Réponse:**

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \dots$$

$$\text{Ou } f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots$$

$$\text{Donc } P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$x_0 = 0, f(x_0) = 0, f'(x_0) = 1, f''(x_0) = -1$$

$$P_2(x) = x - x^2/2$$

- b) [4 pts] En utilisant  $P_2(x)$ , calculer une approximation de  $\ln(1.1)$ .

**Réponse:**

$$\ln(1.1) \approx P_2(0.1) = 0.1 - 0.005 = 0.095$$

- c) [6 pts] À l'aide de la formule d'erreur de Taylor, estimer l'erreur commise et la comparer avec la valeur exacte de l'erreur fournie par votre calculatrice.

**Réponse:**

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x) \text{ où } R_2(x) = \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(\xi) \text{ et } \xi \text{ compris entre } x_0 \text{ et } x.$$

$$\text{Ici, } x_0 = 0, x = 0.1, \text{ et } f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \text{ donc}$$

$$R_2(x) = \frac{0.1^3}{3!} \frac{2}{(1+\xi)^3}$$

Comme  $0 \leq \xi \leq 0.1$ ,  $1 \leq 1 + \xi \leq 1.1$ , donc  $1 \leq (1 + \xi)^3 \leq 1.1^3$  et

$$\frac{1}{(1 + \xi)^3} \leq 1$$

D'où

$$|R_2(0.1)| \leq \frac{10^{-3}}{3}$$

La calculatrice donne  $\ln(1.1) \approx 0.0953101798$ , donc l'erreur est environ  $3.101798 \times 10^{-4}$  ce qui est bien inférieur à  $\frac{10^{-3}}{3} \approx 3.333333 \times 10^{-4}$ .