MAT-2910 : Aide-mémoire pour le mini-test 2

Systèmes d'équations algébriques

- Normes vectorielles :

$$||\vec{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad ||\vec{x}||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

- Normes matricielles :

$$||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad ||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

- Borne pour l'erreur : si $\vec{x}$ est la solution analytique et $\vec{x}^*$ est une solution approximative de $A\vec{x} = \vec{b}$, on pose $\vec{e} = \vec{x} - \vec{x}^*$ et $\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}^*$ et on a :

$$\frac{1}{\mathrm{cond}A}\,\frac{||\vec{r}||}{||\vec{b}||} \leq \frac{||\vec{e}||}{||\vec{x}||} \leq \mathrm{cond}A\,\frac{||\vec{r}||}{||\vec{b}||} \quad \text{et} \quad \mathrm{cond}A \geq \max\left(\frac{||\vec{e}||\,||\vec{b}||}{||\vec{x}||\,||\vec{r}||}\,,\ \frac{||\vec{x}||\,||\vec{r}||}{||\vec{e}||\,||\vec{b}||}\right)$$

- Systèmes non-linéaires : pour $\vec{x}^i$ donné, on résout :

$$J(\vec{x}^i)\,\vec{\delta x} = -\vec{F}(\vec{x}^i)$$

  et on pose $\vec{x}^{i+1} = \vec{x}^i + \vec{\delta x}$

Équations différentielles :

- Euler (ordre 1) : $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$
- Taylor (ordre 2) : $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \dfrac{h^2}{2}\left(\dfrac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \dfrac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} f(t_n, y_n)\right)$
- Euler modifiée (ordre 2) : $\hat{y} = y_n + hf(t_n, y_n)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, \hat{y})\right)$$

- Point milieu (ordre 2) : $k_1 = hf(t_n, y_n)$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})\right)$$

- Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_n, y_n) \\
k_2 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\
k_3 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\
k_4 &= hf(t_n + h, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)
\end{aligned}$$