MAT-2920 Recherche opérationnelle

Robert Guénette

Département de mathématiques et de statistique
Université Laval

January 28, 2013

La recherche opérationnelle (RO)

Les entreprises et les gouvernements veulent toujours prendre les meilleures décisions dans des situations complexes soit pour maximiser les profits ou encore pour satisfaire la clientèle, l'électorat, etc.
La recherche opérationnelle se veut un ensemble de méthodes rationnelles qui cherche à optimiser la prise de décision.
L'être humain n'est pas seul à vouloir optimiser:

- la nature: les lois de la physique dérivent souvent de principes variationnels (mécanique de Lagrange et d'Hamilton), principes de moindres actions, minimum d'énergie, etc.
- système biologique: évolution, code génétique, etc.

Recherche opérationnelle (suite)

Types de problèmes en recherche opérationnelle:

- problèmes aléatoires: processus de Markov, etc.
- problèmes déterministes: optimisation linéaire, non linéaire, programmation dynamique, etc.

Le cours porte uniquement sur la partie déterministe et plus spécifiquement sur l'optimisation linéaire ou programmation linéaire (PL). Les applications sont nombreuses, en particulier

- en administration, management,
- organisation du travail, génie industriel,
- industries automobiles, pétrolières, etc.

Historique de la programmation linéaire

- Programme: terme militaire pour planification
- lié à l'invention du radar à la deuxième guerre mondiale: comment installer un réseau optimal d'antennes.
- la programmation linéaire a été inventée par George Dantzig, John von Neumann et Leonid Kantorovich vers 1940.
- la méthode de base est la méthode du simplexe crée par George Dantzig (1947).
- a connu un immense succès grâce à l'informatique.
- en 1984, Narendra Karmarkar propose une autre méthode qui est à la base des méthodes de point-intérieur.

Exemple

Considérons une petite entreprise familiale qui désire fabriquer de la crème glacée et du beurre à partir du lait produit par leurs vaches. La production hebdomadaire des vaches est de 22 litres.

- Pour faire 1 Kg de beurre, il faut 2 litres de lait tandis que pour faire 1 litre de crème glacée, cela exige 3 litres de lait.
- On entrepose les produits dans un réfrigérateur qui ne peut contenir plus que 6 litres de crème glacée.
- Il faut 1 heure pour produire de 4 litres de crème glacée et 1 Kg de beurre. La famille dispose d'au plus 6 heures par semaine.
- Les prix sont fixés à 5$ par litre de crème glacée et 4$ par Kg de beurre.

Quelles seront les quantités de crème glacée et de beurre qu'il faut produire pour maximiser les profits?

Formulation mathématique

- Choix des variables:
  - $x =$ quantité en litres de crème glacée,
  - $y =$ quantité en Kg de beurre.
- Fonction objective

$$z = 5x + 4y$$

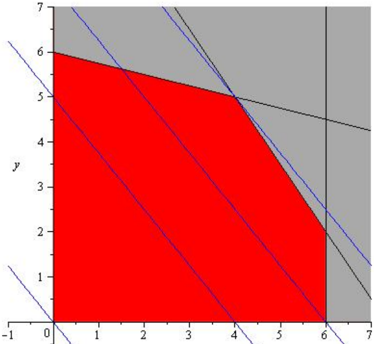
- Les contraintes
  - Capacité du réfrigérateur: $x \leq 6$
  - Temps alloué: $x/4 + y \leq 6$
  - Production: $3x + 2y \leq 22$
  - Limites des variables: $x, y \geq 0$.

Formulation mathématique (suite)

En rśumé, le problème s'énonce comme suit

$$\max \quad 5x+4y$$
$$\begin{cases} x & \leq & 6 \\ x/4+y & \leq & 6 \\ 3x+2y & \leq & 22 \\ x,y & \geq & 0 \end{cases}$$

Etant donné que ce problème possède 2 inconnues, on peut le résoudre par la méthode graphique.
La solution est $(x,y)=(4,5)$ et le profit = 40.



Formulation d'un problème de PL

Forme standard de type max

$$
\begin{array}{lcl}
\max & & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_nx_n \\
\left\{ \begin{array}{lcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
\vdots & \leq & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
x_1, x_2, \dots, x_n & \geq & 0
\end{array} \right. & &
\end{array}
$$

ou sous forme plus compacte

$$
\begin{array}{lcl}
\max & & c^t x \\
\left\{ \begin{array}{lcl}
Ax & \leq & b \\
x & \geq & 0
\end{array} \right. & &
\end{array}
$$

Notations: $x \geq 0 \Longleftrightarrow x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$

Formulation d'un problème de PL

Forme standard de type min

$$\min \quad p_1x_1 + p_2x_2 + \dots p_nx_n$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\ \vdots & \geq & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n & \geq & b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n & \geq & 0 \end{cases}$$

ou sous forme compacte

$$\min \quad p^t x$$
$$\begin{cases} Ax & \geq & b \\ x & \geq & 0 \end{cases}$$

Rappel: $\max\limits_{x\in K} f(x) = -\min\limits_{x\in K} -f(x)$ pour $K \subset \mathbb{R}^n$.

Un problème de diète

La nourriture d'un troupeau est formé de 3 produits P_1, P_2 et P_3 de prix unitaire 340\$, 2400 \$ et 560 \$. D'autre part, cette nourriture doit comporter une quantité minimale de protéines, lipides et de vitamines A.

	seuil minimal
protéines	1100
lipides	1400
vitamines A	1500

Le tableau suivant décrit les apports d'une unité de chaque produit en protéines, lipides et de vitamines A

	protéines	lipides	vitamines A
P_1	1	1	1
P_2	2	3	1
P_3	1	2	3

Problème: il s'agit de déterminer les quantités x_1, x_2 et x_3 des produits P_1, P_2 et P_3 à incorporer à la nourriture pour qu'elle coûte le moins possible et qui assure les seuils minimaux de protéines, lipides et de

Formulation mathématique

- la fonction objective

$$z = 340x_1 + 2400x_2 + 560x_3$$

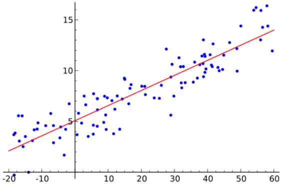
- Les contraintes
  - en protéine: $x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1100$
  - en lipides: $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1400$
  - en lipides: $x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 1500$
  - Limites des variables: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

le problème s'énonce comme suit

$$\begin{array}{lcl} \min & & 340x_1 + 2400x_2 + 560x_3 \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{array} \right. & \begin{array}{c} \geq \\ \geq \\ \geq \\ \geq \end{array} & \begin{array}{l} 1100 \\ 1400 \\ 1500 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

Régression linéaire

Le problème consiste à calculer la meilleure droite d'équation $y = mx + \gamma$ qui représente au mieux l'ensemble des points $\{(x_i, y_i\}_{i=1}^n$.



La méthode classique consiste à minimiser

$$\min_{(m,\gamma)} f(m,\gamma) = \min_{(m,\gamma)} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (mx_i + \gamma - y_i)^2.$$

- On utilise le calcul différentiel pour résoudre ce problème:

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0.$$

- Cette approche possède des désavantages: trop grandes contributions pour de grands écarts.

Régression linéaire (suite)

Une meilleure approche consiste à minimiser la sommes des écarts en valeur absolue:

$$\min_{(m,\gamma)} \sum_{i=1}^{n} |mx_i + \gamma - y_i|.$$

Mais ce problème n'est pas un problème de PL et surtout pas différentiable!
Mais il est facile de le transformer. On introduit les variables

$$z_i = |mx_i + \gamma - y_i|.$$

et le problème s'énonce

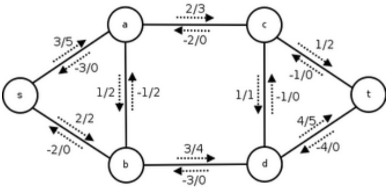
$$\min_{(m,\gamma,z_i)} \sum_{i=1}^{n} z_i$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} -z_i \leq mx_i + \gamma - y_i \leq z_i \\ z_i \geq 0 \end{cases}$$

Problème de flot dans un réseau

On considère un réseau. Le problème consiste à chercher les quantités à transporter d'un noeuds à l'autre afin de minimiser le coût total de transport.



Pour une arête $i \to j$ donnée: on note par

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \text{coût unitaire de transport} \\ x_{ij} &= \text{quantité à transporter} \end{aligned}$$

Réseau (suite)

- Fonction objective

$$\min z = \sum_{i \to j} c_{ij} x_{ij}$$

- Les contraintes: loi de conservation

  En chaque noeud i:

$$\begin{aligned} \text{flot sortant} &= \text{flot entrant + production du noeud } i \\ \sum_{i \to j} x_{ij} &= \sum_{k \to i} x_{ki} + b_i \end{aligned}$$

- Limites des variables: $x_{ij} \geq 0$.