Chapitre 2

Principes généraux de la programmation linéaire

2.1 Généralités

Nous débutons le chapitre par un théorème qui garantie l'existence d'un minimum et aussi d'un maximum pour un problème d'optimisation quelconque.

Théorème 2.1.1 *Soit f une fonction continue définie sur un domaine $K \subset \mathbb{R}^n$ fermé et borné, alors f atteint ses valeurs minimale et maximale :*

$$\exists \bar{x} \in K \qquad f(\bar{x}) = \max_{x \in K} f(x), \qquad \exists \bar{y} \in K \qquad f(\bar{y}) = \min_{x \in K} f(x).$$

Toutefois, ce théorème sera d'une importance limitée dans le cours car il arrivera souvent que la région admissible K n'est pas bornée.

Définition 2.1.1 Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est convexe s'il vérifie la propriété

$$\forall x, y, \in K \quad \text{et} \quad \forall t \quad 0 \leq t \leq 1 \Longrightarrow (1-t)x + ty \in K.$$

Autrement dit, si x, y sont 2 points dans K, alors le segment de droite $\overline{xy}$ est inclus dans K.

La propriété suivante sera souvent utile par la suite.

Proposition 2.1.1 *L'intersection $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{N} K_i$ d'une famille d'ensembles convexes K_i est aussi convexe.*

Considérons l'ensemble

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}.$$

Montrons qu'il est convexe.

DÉMONSTRATION: Soit $0 \leq t \leq 1$.

$$x \in K_1 \Longrightarrow Ax \leq b \Longrightarrow (1-t)Ax \leq (1-t)b$$

$$y \in K_1 \Longrightarrow Ay \leq b \Longrightarrow tAy \leq tb$$

On additionne les deux lignes

$$(1-t)Ax + tAy = A((1-t)x + ty) \leq (1-t)b + tb = b \Longrightarrow (1-t)x + ty \in K_1.$$

■

De même l'ensemble

$$K_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$$

est aussi convexe.

Grâce à la proposition, on peut déduire que

$$K = \{x \geq 0 \mid Ax \leq b\}$$

est convexe car K est l'intersection des ensembles K_1 et K_2.

2.2 Calcul algébrique des sommets

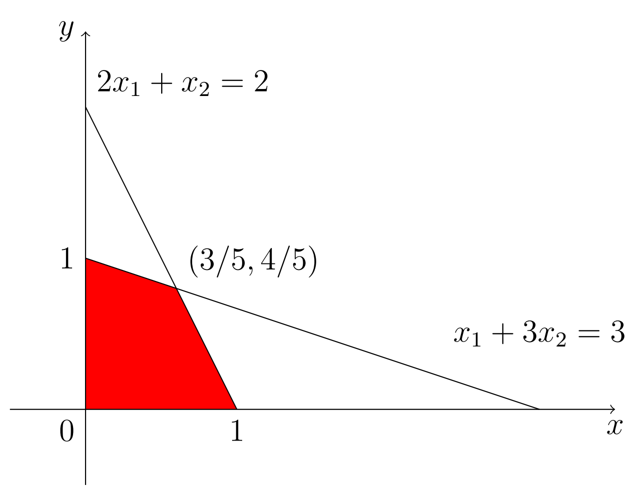
2.2.1 Motivation

Considérons le problème

$$\max z = x_1 + x_2 \tag{2.1}$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & \leq \ 2, \\ x_1 + 3x_2 & \leq \ 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$



que l'on transforme sous forme d'égalité avec l'ajout de variables d'écart. La forme canonique s'écrit

$$\max z = x_1 + x_2$$

avec les contraintes d'égalité

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 & = & 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. & & \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Nous savons que la solution du problème (2.1) se trouve en un sommet de l'ensemble des solutions admissibles noté par K (région réalisable).

La question qui se pose est la suivante : comment identifier un sommet sans faire de graphique. Pour cela, il faut pouvoir calculer les sommets de manière algébrique pour des problèmes ayant plus que 2 variables.

Les contraintes d'égalité (2.2) forment un système de 2 équations à 4 inconnues. Si on pose 2 variables $x_{i_1} = x_{i_2} = 0$, on pourra résoudre le système carré 2×2 pour obtenir la solution (x_1, x_2, x_3, x_4).

Exemple 2.2.1 Par exemple, basé sur le problème (2.1), on a que

- le sommet $(3/5, 4/5)$ se trouve à l'intersection des droites

$$2x_1 + x_2 = 2 \iff x_3 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 = 3 \iff x_4 = 0$$

- le sommet $(1, 0)$ se trouve à l'intersection des droites

$$2x_1 + x_2 = 2 \iff x_3 = 0$$

$$x_2 = 0 \iff x_2 = 0$$

Toutefois, cette procédure engendre des points qui ne sont pas dans la région admissibles K. Il faudra éliminer ces points. Par exemple,

$$x_2 = 0 \text{ et } x_4 = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2x_1 + x_3 & = & 2, \\ x_1 & = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow x_1 = 3 \text{ et } x_3 = -4$$

La solution $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 0, -4, 0)$ n'est pas admissible.

En appliquant l'idée de choisir 2 variables et de les poser à 0, on aura au total 6 possibilités dont 4 seront admissibles.

Regardons cela en termes matricielles. Les données du système (2.2) s'écrivent

$$Ax = b$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On notera par a_1, a_2, a_3 et a_4 les 4 colonnes de A .
Pour le choix $x_3 = x_4 = 0$, on enlève les colonnes 3 et 4

$$Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 = x_1 a_1 + x_2 a_2 = b$$

qui admet la solution $(x_1, x_2) = (3/5, 4/5)$.

La philosophie générale est que

$$\boxed{\text{Un sommet}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\text{une base de l'espace-colonne de } A}$$

Nous allons formaliser davantage cette méthode et préciser la notion de sommet en dimensions supérieures.

2.2.2 Caractérisation des sommets

Nous savons que tout problème d'optimisation linéaire avec des contraintes d'inégalité peut s'écrire sous la forme canonique ayant des contraintes d'égalité (en ajoutant des variables d'écarts ou de surplus). Donc, il suffit de ne considérer que des problèmes avec des contraintes d'égalité

$$\begin{aligned} &\max c^t x \\ &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

La région admissible est donnée par

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0 \text{ et } Ax = b\}.$$

où A est une matrice de format $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Nous savons déjà que K est un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$. Mais que signifie, en général, qu'un point de K soit un sommet ?

Définition 2.2.1 Un point x dans K est un sommet si, pour $y, z, \in K$ et $0 < t < 1$,

$$x = (1-t)y + tz \Longrightarrow x = y = z$$

Autrement dit, x ne peut se situer à l'intérieur d'un segment de droite reliant 2 points y, z de K.

Exemple 2.2.2

a) Si $K = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, alors les sommets sont tous les points du cercle unité.

b) Si $K = \{x \geq 0\}$, alors 0 est un sommet. En effet, si $y, z \geq 0$ et $0 < t < 1$,

$$0 = (1-t)y + tz \geq 0 \Longrightarrow \begin{array}{ll} (1-t)y = 0 \Longrightarrow y = 0 \\ tz = 0 \qquad\quad \Longrightarrow z = 0 \end{array} \Longrightarrow y = z = 0$$

c) Si $0 \in K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0 \text{ et } Ax = b\}$, on a que $b = 0$. De plus, le point 0 est un sommet. La preuve précédente s'applique.

Pour $x \in K$, on notera par

$$I^+(x) = \{i \in [1, 2, \ldots, n] \mid x_i > 0\}$$

Autrement dit, c'est l'ensemble des indices des variables actives. Une variable est dite active si $x_i > 0$ et inactive si $x_i = 0$.

Exemple 2.2.3

— le point $x = (3/5, 4/5, 0, 0) \Longrightarrow I^+(x) = \{1, 2\}$,

— le point $x = (1/2, 1/2, 1/2, 1) \Longrightarrow I^+(x) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Nous sommes en position de donner une caractérisation algébrique des sommets de K. On notera la colonne j de A par a_j.

Théorème 2.2.1 *Un point $x \in K$ $(x \neq 0)$ est un sommet de K si et seulement si $\{a_j\}_{j \in I^+(x)}$ forme un système linéairement indépendant.*

DÉMONSTRATION: $\Longrightarrow$

Supposons le contraire, i.e. $\{a_j\}_{j \in I^+(x)}$ est linéairement dépendant. Ceci signifie qu'il existe des w_j non tous nuls tel que

$$\sum_{j \in I^+(x)} w_j a_j = 0.$$

Pour $j \notin I^+(x)$, on pose $w_j = 0$. Ainsi on obtient

$$0 = \sum_{j \in I^+(x)} w_j a_j = \sum_{j=1}^{n} w_j a_j = Aw \Longrightarrow Aw = 0$$

Pour $j \in I^+(x)$, on a que $x_j > 0$. Etant donné qu'il y a un nombre fini des $x_j > 0$, il sera toujours possible de choisir un nombre $\theta \neq 0$ tel quel

$$x_j \pm \theta w_j \geq 0 \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

Observons que, dans le cas où $j \notin I^+(x)$, on a que $x_j \pm \theta w_j = 0$.

L'objectif est de montrer que $x \pm \theta w \in K$.

En effet, on a que $x \pm \theta w \geq 0$ par construction. De plus,

$$A(x \pm \theta w) = Ax \pm \theta Aw = Ax \pm 0 = Ax = b.$$

Donc on a bien $x \pm \theta w \in K$.

Or

$$x = \frac{x + \theta w}{2} + \frac{x - \theta w}{2}$$

qui est de la forme $x = (1-t)y + tz$ avec $t = 1/2$, ce qui montre que x n'est pas un sommet. Ceci est contraire à l'hypothèse. ■

DÉMONSTRATION: $\Longleftarrow$

Inversement, on suppose que $\{a_j\}_{j \in I^+(x)}$ est linéairement indépendant. Ecrivons

$$x = (1-t)y + tz \qquad y, z \in K \quad 0 < t < 1$$

On pose $w = z - y$. L'objectif est de montrer que $w = 0$. En effet, on aura bien que $x = y = z$ ce qui montrera que x est un sommet.

Si $j \notin I^+(x)$,

$$x_j = 0 = (1-t)y_j + tz_j \geq 0 \quad (\text{car } y, z \geq 0) \quad \Longrightarrow y_j = z_j = 0 \Longrightarrow w_j = 0.$$

De plus,

$$Aw = A(z-y) = Az - Ay = b - b = 0 \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} w_j a_j = \sum_{j \in I^+(x)} w_j a_j = 0$$

Mais $\{a_j\}_{j \in I^+(x)}$ est linéairement indépendant. On obtient que

$$w_j = 0 \quad \forall j \in I^+(x) \Longrightarrow w_j = 0 \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

Donc $w = 0 = z - y$ et par conséquent x est un sommet.

■

Exemple 2.2.4

a) voir le problème (2.1) de la section 2.2

Sommet	(x_1, x_2, x_3, x_4)	$I^+(x)$	*Base*
$(3/5, 4/5)$	$(3/5, 4/5, 0, 0)$	$\{1, 2\}$	$\{a_1, a_2\}$
$(1, 0)$	$(1, 0, 0, 2)$	$\{1, 4\}$	$\{a_1, a_4\}$
$(0, 1)$	$(0, 1, 1, 0)$	$\{2, 3\}$	$\{a_2, a_3\}$
$(0, 0)$	$(0, 0, 2, 3)$	$\{3, 4\}$	$\{a_3, a_4\}$

b) En relation avec le problème modèle du premier chapitre

$$\begin{array}{c}\max \quad 5x_1+4x_2\\ \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & \leq & 6\\ x_1/4+x_2 & \leq & 6\\ 3x_1+2x_2 & \leq & 22\\ x_1,x_2 & \geq & 0\end{array}\right.\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c}\max \quad 5x_1+4x_2\\ \left\{\begin{array}{lcl} x_1+x_3 & = & 6\\ x_1/4+x_2+x_4 & = & 6\\ 3x_1+2x_2+x_5 & = & 22\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 & \geq & 0\end{array}\right.\end{array}$$

Sommet	(x_1,x_2,x_3,x_4)	$I^+(x)$	*Base*
$(4,5)$	$(4,5,2,0,0)$	$\{1,2,3\}$	$\{a_1,a_2,a_3\}$
$(6,2)$	$(6,2,0,2.5,0)$	$\{1,2,4\}$	$\{a_1,a_2,a_4\}$
$(6,0)$	$(6,0,0,4.5,4)$	$\{1,4,5\}$	$\{a_1,a_4,a_5\}$
$(0,6)$	$(0,6,6,0,10)$	$\{2,3,5\}$	$\{a_2,a_3,a_5\}$
$(0,0)$	$(0,0,6,6,22)$	$\{3,4,5\}$	$\{a_3,a_4,a_5\}$

Les 5 autres choix de bases ne conduisent pas à des solutions réalisables.

2.2.3 Solution de base admissible

Soit A une matrice de format $m \times n$. Faisons l'hypothèse que le rang de la matrice A est égal à m. Dans ce cas, la dimension de l'espace-colonne est égal à m. Une base de l'espace-colonne sera notée par $\{a_j\}_{j\in\Lambda}$ où $\Lambda = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$ correspond aux choix des m colonnes de A qui forment la base.

Si $\{a_j\}_{j\in\Lambda}$ est une base de l'espace-colonne, alors il existe une vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ t.q.

$$\sum_{j\in\Lambda} x_j a_j = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j = b \qquad \text{si on choisit } x_j = 0 \text{ pour } j \notin \Lambda$$

Si $x \geq 0$, le point est admissible. De plus, le point x est un sommet car $I^+(x) \subset \Lambda$ et va correspondre à un sous-ensemble des colonnes a_j qui sont donc automatiquement linéairement indépendants. Par conséquent, le point x correspond à un sommet.

Si x n'est pas admissible, il faudra le rejeter.

Inversement, si x est un sommet, selon la caractérisation des sommets, on a que

$$\sum_{j\in I^+(x)} x_j a_j = b$$

pour un ensemble $\{a_j\}$ linéairement indépendant. Il est toujours possible d'étendre cet ensemble en une base $\{a_j\}_{j\in\Lambda}$ de $\mathbb{R}^n$.

Pour les autres valeurs de $j \notin \Lambda \setminus I^+(x)$, on pose $x_j = 0$. Ceci permet d'écrire

$$b = \sum_{j \in I^+(x)} x_j a_j = \sum_{j \in \Lambda} x_j a_j = Ax$$

Par conséquent, le vecteur x sera une solution de base, c'est-à-dire la solution obtenue à partir de $Ax = b$ en choisissant m colonnes de A qui forment une base de l'espace-colonne de A.
Autrement dit, il existe une correspondance entre les sommets et les bases de l'espace-colonne de A :

$$\boxed{\text{Sommets}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{Bases de l'espace-colonne}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{Solutions de base}}$$

Remarque 2.2.1
Attention, le lien entre base et sommet n'est pas toujours biunivoque comme le montre l'exemple suivant.
Considérons le problème

$$\begin{aligned} &\min z = c^t x, \\ &Ax = b, \\ &x \geq 0. \end{aligned}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La solution de base pour le choix $\{a_1, a_3\}$ sera $(0, 0, 1)$.
De même, la solution de base pour le choix $\{a_2, a_3\}$ sera $(0, 0, 1)$.
Il est facile de voir qu'il y a qu'un seul sommet.

2.3 Théorèmes fondamentaux de l'optimisation linéaire

Voici le théorème fondamental qui permet d'affirmer que la solution optimale d'un problème d'optimisation linéaire est toujours atteinte en un sommet de la région admissible.

Théorème 2.3.1 Théorème fondamental
On considère le problème

$$\begin{aligned} &\min z = c^t x, \\ &Ax = b, \\ &x \geq 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Si ce problème admet une solution, alors au moins un sommet de $K = \{x \geq 0 \mid Ax = b\} \subset \mathbb{R}^n$ est aussi une solution.

Démonstration: Soit x une solution de (2.3).

Si $I^+(x) = \emptyset \Longrightarrow x = 0$ et on a vu que $x = 0$ est un sommet de K.

Supposons que $I^+(x) \neq \emptyset$.
Si $\{a_j\}_{j \in I^+(x)}$ est linéairement indépendant, alors x est un sommet selon le théorème 2.1.1.
Donc supposons le contraire, i.e. $\{a_j\}_{j \in I^+(x)}$ est linéairement dépendant.

$$\Longrightarrow \exists w_j \text{ non tous nuls t.q. } \sum_{j \in I^+(x)} w_j a_j = 0.$$

On étend la somme à tous les indices en posant $w_j = 0$ pour $j \notin I^+(x)$ et on s'arrange pour avoir

$$\max_j w_j > 0.$$

On a que

$$Aw = \sum_j w_j a_j = 0.$$

L'idée est d'aller dans la direction d'un sommet $x + \theta w$ pour un θ à déterminer.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, le point $x + \theta w$ vérifie

- $A(x + \theta w) = Ax + \theta Aw = Ax = b$ car $Aw = 0$,
- $(x + \theta w)_j = \begin{cases} x_j + \theta w_j & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \text{ par construction de } w_j \end{cases}$

Si $w_j > 0$, on aura que $x_j + \theta w_j \geq 0 \Longleftrightarrow \theta \geq -\frac{x_j}{w_j}$ (négatif)
On pose

$$\theta_0 = \max\{-\frac{x_j}{w_j} \mid \text{ pour les } j \text{ t.q. } x_j > 0 \text{ et } w_j > 0 \ \}$$

On a que $-\infty < \theta_0 < 0$ car $x_j > 0$ et $w_j > 0$.

Si $w_j < 0$, on aura que $x_j + \theta w_j \geq 0 \Longrightarrow \theta \leq -\frac{x_j}{w_j} > 0$
On pose

$$\theta_1 = \min\{-\frac{x_j}{w_j} \mid \text{ pour les } j \text{ t.q. } x_j > 0 \text{ et } w_j < 0 \ \}$$

Donc $0 < \theta_1 \leq \infty$ (on a obtient ∞ si l'ensemble ci-dessus est vide.)
On restreint $x + \theta w$ pour $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ avec $\theta_0 < 0 < \theta_1$
On a que $x + \theta w \in K$ car $x + \theta w \geq 0$ par construction et

$$A(x + \theta w) = Ax + \theta Aw = Ax + 0 = Ax = b$$

Or x est la solution optimale. Donc $\theta = 0$ est la solution optimale de la fonction

$$g(\theta) = f(x + \theta w) = c^t(x + \theta w) \qquad \text{définie sur } [\theta_0, \theta_1]$$

Ceci implique

$$g'(0) = 0 = c^t w = f(w)$$

Par conséquent

$$f(x+\theta w) = f(x) + \theta f(w) = f(x)$$

Donc, $x+\theta w$ sont tous des solutions optimales pour $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$.

Or par construction de θ_0, on a que $x_j + \theta w_j \geq 0$. Pour l'indice j qui correspond au maximum de $\{-\frac{x_j}{w_j} \mid \text{ pour les } j \text{ t.q. } x_j > 0 \text{ et } w_j > 0 \}$, on a que $x_j + \theta_0 w_j = 0$. Donc

$$I^+(x+\theta_0 w) \subset I^+(x) \qquad \text{avec } card\ I^+(x+\theta_0 w) < card\ I^+(x)$$

On recommence la preuve avec

$$x \leftarrow x + \theta_0 w.$$

Ainsi, on va aboutir éventuellement sur les cas

a) $I^+(x) = \emptyset$

b) $\{a_j\}_{j \in I^+(x)}$ est lin. indép.

Donc x sera un sommet. Ce qui achève la démonstration. ∎

Voici une conséquence immédiate du théorème fondamental qui assure que la région admissible contient toujours au moins un sommet.

Théorème 2.3.2 Existence d'un sommet

Si l'ensemble $K = \{x \geq 0 \mid Ax = b\} \neq \emptyset$ où A est une matrice de format $m \times n$ et b un vecteur de dimension m , il existe au moins un sommet dans K. De plus, les sommets sont en nombre fini.

DÉMONSTRATION: L'idée de la preuve consiste à montrer que le sommet cherché est en fait la solution d'un certain problème d'optimisation que nous allons définir.
Considérons le problème

$$\begin{array}{l} \min z = \sum_{i=1}^m y_i, \\ (x,y) \in \mathbb{R}^{m+n} \\ Ax + y = b, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{array} \tag{2.4}$$

Soit $x \in K \neq \emptyset \Longrightarrow$ le point $(x,0)$ est une solution du problème (2.4) car il minimise la fonction objective $\sum_{i=1}^m y_i = 0$. On observera que la fonction objective est toujours positive car $y \geq 0$. Donc 0 est la valeur minimale de cette fonction.
On applique le théorème fondamental à ce problème et on en déduit qu'il existe un sommet $(\bar{x}, \bar{y})$ de l'ensemble

$$\{(x,y) \geq 0 \mid Ax + y = b\}.$$

Mais la solution doit vérifier que $\bar{y} = 0$ car c'est le minimum et qu'il doit vérifier $\sum_{i=1}^m \bar{y}_i = 0 \Longrightarrow \bar{y} = 0$. Ceci implique

$$A\bar{x} + \bar{y} = b \Longleftrightarrow [A \;\; I] \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \Longrightarrow A\bar{x} = b \Longleftrightarrow \sum_{j \in I^+(x)} \bar{x}_j a_j = b$$

De plus il est clair que $I^+(\bar{x}, \bar{y}) \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ et que les a_j sont lin. indép. Donc $\bar{x}$ est une sommet de K. De plus, il y a un nombre fini de façons de choisir des vecteurs-colonnes de A qui soient linéairement indépendants.

■