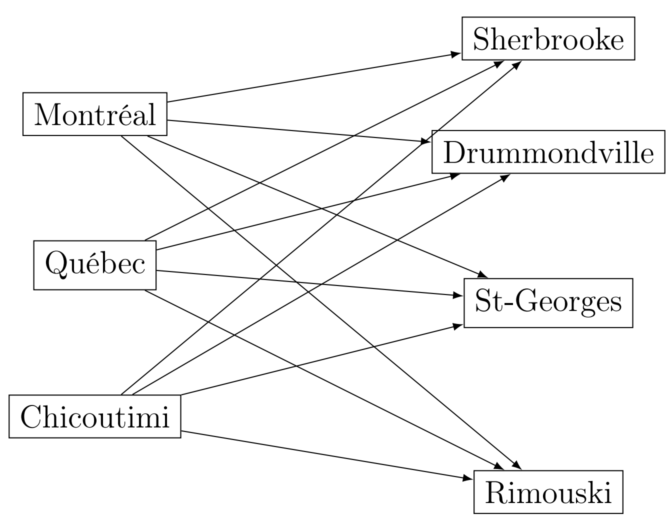
Chapitre 6

Problèmes de transport

Il s'agit de déterminer la façon optimale d'acheminer des biens à partir de m entrepôts et de les transporter vers n destinations et cela à moindre coût. Nous allons faire l'hypothèse que toute la marchandise de tous les entrepôts doit être acheminer vers les différentes destinations.
Nous allons illustrer ce problème à partir de l'exemple suivant.

Entrepôt	Sherbrooke	Drummondville	St-Georges	Rimouski	Offre
Montréal	147 $	121 $	344 $	552 $	450 T
Québec	241 $	153 $	102 $	312 $	450 T
Chicoutimi	451 $	364 $	557 $	285 $	750 T
Demande	400 T	450 T	550 T	250 T	1650 T

On notera que l'offre totale est bien égale à la demande ce qui est conforme à l'hypothèse ci-dessus.



Mise en équation

Le problème général de transport sous l'hypothèse que l'offre totale égale la demande, s'énonce comme suit. Notons les sources par $S_1, S_2, \ldots, S_m$ et $D_1, D_2, \ldots, D_n$ les destinations. On introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
x_{ij} &= \text{quantité transportée de } S_i \text{ à } D_j, \\
c_{ij} &= \text{coût unitaire du transport de } S_i \text{ à } D_j, \\
a_i &= \text{offre de la source } S_i, \\
b_j &= \text{demande de la destination } D_j.
\end{aligned}$$

On suppose que les a_i sont positifs $a_i \geq 0$ et de même pour les $b_j \geq 0$.

Il s'agit de minimiser le coût de transport. La fonction objective s'écrit :

$$z = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

sous les contraintes

$$\begin{array}{lll}
\text{Offre :} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \geq 0 & \forall i = 1, 2, \ldots, m, \\
\text{Demande :} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \geq 0 & \forall j = 1, 2, \ldots, n, \\
\text{Positivité :} & x_{ij} \geq 0. &
\end{array}$$

Proposition 6.0.1 *Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de transport admet une solution optimale est que*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Démonstration: Si x est une solution qui vérifie les contraintes, on a que

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \Longrightarrow \sum_{i,j} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \Longrightarrow \sum_{i,j} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Ceci implique

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Inversement, si $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = T$, on pose

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{T} \geq 0.$$

Montrons que ce choix de x vérifie les contraintes. En effet

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^n a_i b_j = a_i \, \frac{\sum_{j=1}^n b_j}{T} = a_i$$

et

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^m a_i b_j = b_j \, \frac{\sum_{i=1}^m a_i}{T} = b_j$$

De plus, l'ensemble des solutions réalisables est borné. Il suffit d'observer que, pour une paire d'indices i et j,

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \geq 0 \Longrightarrow 0 \leq x_{ij} \leq a_i$$

Par conséquent, le problème admet une solution optimale. ∎

6.1 Propriétés de la matrice A

Le problème de transport s'écrit de manière matricielle

$$\begin{aligned} &\min \quad z = c^t x, \\ &Ax = d, \\ &x \geq 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

où $x = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{2n}, \ldots x_{mn})$. C'est-à-dire que l'on déroule la matrice x_{ij} suivant les lignes. On fait de même pour $c = (c_{11}, \ldots, c_{1n}, c_{21}, \ldots, c_{mn})$. Il y a nm variables et $n + m$ contraintes. Le vecteur d correspond à $d = (a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n)$.
Illustrons la matrice A pour $m = 3$ et $n = 4$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & \\ & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & \\ & & & 1 & & & & 1 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

La somme des n premières lignes donne

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_n = (1, 1, \ldots, 1).$$

Aussi, aa somme des lignes $n+1$ à $n+m$ donne

$$L_{n+1} + L_{n+2} + \cdots + L_{n+m} = (1, 1, \ldots, 1).$$

Si on combine ces deux résultats, on obtient

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_n - L_{n+1} - L_{n+2} - \cdots - L_{n+m} = 0$$

Ceci implique que

$$rg(A) < m + n.$$

Proposition 6.1.1 *On a les propriétés suivantes pour la matrice A.*

- *Chaque colonne contient exactement deux entrées non nulles et qui sont égales à 1.*
- *Le rang de A est égal à $m+n-1$.*
- *Chacune des lignes est une combinaisons linéaire des autres lignes.*
- *Il y a toujours une ligne de trop que l'on peut éliminer.*
- *Il y a exactement $m+n-1$ variables de base réalisables.*

Donnons une idée de la preuve que le rang de A est $m+n-1$. En renumérotant si nécessaire, il suffit de montrer que les lignes $L_2, L_3, \ldots, L_{m+n}$ sont linéairement indépendantes. Pour cela, posons

$$\alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \cdots + \alpha_{m+n} L_{m+n} = 0.$$

A cause de la structure particulière de la matrice, ceci implique immédiatement que

$$\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \cdots = \alpha_{m+n} = 0.$$

Par la suite, on aura les relations

$$\begin{aligned}
&\alpha_2 + \alpha_{m+1} = 0 \Longrightarrow \alpha_2 = 0,\\
&\alpha_3 + \alpha_{m+1} = 0 \Longrightarrow \alpha_3 = 0,\\
&\vdots\\
&\alpha_m + \alpha_{m+1} = 0 \Longrightarrow \alpha_m = 0.
\end{aligned}$$

6.2 Dual du problème de transport

Un problème de transport est de la forme

$$\min z = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} = c^t x$$

sous les contraintes

$$\begin{array}{lll} \forall i = 1, 2, \ldots, m & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & \Longleftrightarrow \quad A_1 x = a \\ \forall j = 1, 2, \ldots, n & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & \Longleftrightarrow \quad A_2 x = b \\ x_{ij} \geq 0 & & \Longleftrightarrow \quad x \geq 0 \end{array}$$

Sous forme compact, ceci s'écrit

$$\begin{array}{l} \min \quad z = c^t x \\ \begin{bmatrix} A_1 \\ -A_1 \\ A_2 \\ -A_2 \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} a \\ -a \\ b \\ -b \end{bmatrix} \\ x \geq 0. \end{array}$$

Le dual est

$$\begin{array}{l} \max \quad z = a^t u_+ - a^t u_- + b^t v_+ - b^t v_- \\ \begin{bmatrix} A_1^t & -A_1^t & A_2^t & -A_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_+ \\ u_- \\ v_+ \\ v_- \end{bmatrix} \leq c \\ u_+, u_-, v_+, v_- \geq 0. \end{array}$$

C'est-à-dire avec $u = u_+ - u_-$ et $v = v_+ - v_-$, on obtient

$$\begin{array}{l} \max \quad z = a^t u + b^t v \\ A_1^t u + A_2^t v \leq c \\ u, v \text{ libres} \end{array}$$

Or

$$A_1^t u + A_2^t v \leq c \Longleftrightarrow u_i + v_j \leq c_{ij}$$

Supposons que x soit la solution optimale du problème. Selon les conditions KKT, on a

$$x^t \left(c - A_1^t u - A_2^t v\right) = 0$$

On a les relations

$$u_i + v_j = c_{ij} \qquad \forall x_{i,j} > 0$$

Si x est solution de base non dégénéré, on a bien la décomposition $u_i + v_j = c_{ij}$ pour les indices des variables de base.

6.3 Méthode du simplexe appliquée au problème de transport

Voici la démarche qui sera utilisée :

a) Trouver une solution réalisable de base.

b) Comment passer à une autre solution de base adjacente.

c) Déterminer si la solution est optimale.

6.3.1 Détermination d'une solution réalisable de base

A. **Méthode du coin nord-ouest**

Démarche :

a) On débute par la case $(1, 1)$ (coin nord-ouest). Allouer à cette case la quantité la plus grande possible afin de satisfaire la demande j ou bien d'épuiser la source i.
b) Si la source i est épuisée, rayer la ligne i. Si la demande j est satisfaite, rayer la colonne j.
c) On recommence l'étape (a) à partir de la sous-matrice.

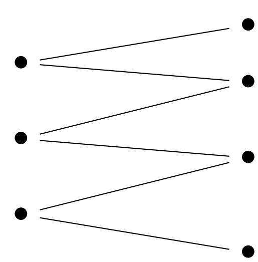
Par exemple :

	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre
S_1	400	50			450
S_2		400	50		450
S_3			500	250	750
Demande	400	450	550	250	

Les variables de base sont

$$x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34}$$

pour un total de $6 = m + n - 1$ variables car $m = 3$ et $n = 4$. Le coût associé à cette solution est $z = 480, 900$. En terme de graphe, on obtient la représentation



qui est un arbre partiel générateur du graphe biparti (non orienté) associé au problème de transport. Ce qui montre bien que x est une solution de base.

REMARQUE 6.3.1
— méthode facile,
— ne tient pas compte des coûts de transport,
— loin de la solution optimale,
— la moins efficace.

B. **Méthode de l'entrée minimale**

Démarche :

a) Choisir la case (i, j) de coût minimal. Allouer à cette case la quantité la plus grande possible afin de satisfaire la demande j ou bien d'épuiser la source i.

b) Si la source i est épuisée, rayer la ligne i. Si la demande j est satisfaite, rayer la colonne j.

c) On recommence l'étape (a) à partir de la sous-matrice.

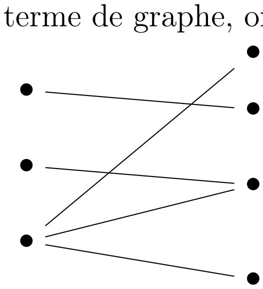
Par exemple :

	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre
S_1		450			450
S_2			450		450
S_3	400		100	250	750
Demande	400	450	550	250	

Les variables de base sont

$$x_{12}, x_{23}, x_{31}, x_{33}, x_{34}$$

avec un total de $5 < 6 = m + n - 1$ variables de base. Donc la solution de base est dégénérée. Le coût associé à cette solution est $z = 407, 700$. Ceci est mieux que la solution du coin nord-ouest. En terme de graphe, on obtient la représentation



qui est un arbre partiel générateur du graphe biparti (non orienté) associé au problème de transport. Toutefois, ce sous-graphe n'est pas connexe. Il faut lui ajouter une arête, par exemple celle associée à la variable x_{22}. Ce qui montre bien que x est une solution de base.

6.3.2 Passage à une solution de base adjacente

Nous allons utiliser la technique des coûts duaux telle que présentée à la section 6.2. Etant donné une solution de base x, la méthode consiste à déterminer une décomposition des coefficients c_{ij} (les coûts de transport) de la forme

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

pour les indices correspondants à ceux de la solution de base.

Il y a $m + n - 1$ équations pour $m + n$ inconnues. Dans la pratique, on pose $u_1 = 0$ et on résoud pour les autres variables.
Reprenons notre exemple du début. Pour chaque case, on affiche le coefficient c_{ij} qui est sont encadré et la solution de base. La case est vide si la variable est hors-base. Démarrons avec la solution fournie par la méthode du coin nord-ouest.

400 $\boxed{147}$	50 $\boxed{121}$	$\boxed{344}$	$\boxed{552}$	450
$\boxed{241}$	400 $\boxed{153}$	50 $\boxed{102}$	$\boxed{312}$	450
$\boxed{451}$	$\boxed{364}$	500 $\boxed{557}$	250 $\boxed{285}$	750
400	450	550	250	1650

On évalue les coûts duaux $c_{ij} = u_i + v_j$ de la manière suivante

$$c_{11} = u_1 + v_1 \Longleftrightarrow 147 = 0 + v_1 \Longrightarrow v_1 = 147,$$

$$c_{12} = u_1 + v_2 \Longleftrightarrow 121 = 0 + v_2 \Longrightarrow v_2 = 121,$$

$$c_{22} = u_2 + v_2 \Longleftrightarrow 153 = u_2 + 121 \Longrightarrow u_2 = 32,$$

$$c_{23} = u_2 + v_3 \Longleftrightarrow 102 = 32 + v_3 \Longrightarrow v_3 = 70,$$

$$c_{33} = u_3 + v_3 \Longleftrightarrow 557 = u_3 + 70 \Longrightarrow u_3 = 487,$$

$$c_{34} = u_3 + v_4 \Longleftrightarrow 285 = 487 + v_4 \Longrightarrow v_4 = -202.$$

Il est pratique d'ajouter ces informations dans le tableau

400 $\boxed{147}$	50 $\boxed{121}$	$\boxed{344}$	$\boxed{552}$	450	$u_1 = 0$
$\boxed{241}$	400 $\boxed{153}$	50 $\boxed{102}$	$\boxed{312}$	450	$u_2 = 32$
$\boxed{451}$	$\boxed{364}$	500 $\boxed{557}$	250 $\boxed{285}$	750	$u_3 = 487$
400	450	550	250	1650	
$v_1 = 147$	$v_2 = 121$	$v_3 = 70$	$v_4 = -202$		

Faisons entrer la variable x_{32} dans la base. Il faudra identifier la variable qui sortira de la base et calculer la valeur de cette variable $x_{32} = \theta$.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	400	50			450
S_2		$400-\theta$	$50+\theta$		450
S_3		θ	$500-\theta$	250	750
	400	450	550	250	

Le choix de θ doit repecter la contrainte de positivité

$$\left.\begin{array}{l} 400-\theta \geq 0 \\ \theta \geq 0 \\ 500-\theta \geq 0 \\ 50+\theta \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow 400 \geq \theta$$

Si on choisit $\theta = 400$, la case $(2,2)$ devient nulle et donc la variable x_{22} sort de la base. La nouvelle solution de base est

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	400	50			450
S_2			450		450
S_3		400	100	250	750
	400	450	550	250	

Nous allons évaluer de combien la fonction objective z a changé par unité de θ. Pour cela, on suit le cycle

$$(3,2) \rightarrow (3,3) \rightarrow (2,3) \rightarrow (2,2)$$

Suivant ce trajet, la variation s'écrit

$$\begin{aligned} \Delta z &= c_{32} - c_{33} + c_{23} - c_{22} \\ &= c_{32} - (u_3 + v_3) + (u_2 + v_3) - (u_2 + v_2) \\ &= c_{32} - u_3 - v_2 \end{aligned}$$

Dans notre exemple, ceci correspond à $\Delta z = c_{32} - u_3 - v_2 = 364 - 487 - 121 = -244$. Par conséquent, il est profitable de faire entrer dans la base la variable x_{32} car la valeur de z diminue.

Démarche :

a) A une solution de base donnée, évaluer les coûts duaux $u_i + v_j = c_{ij}$.

b) Pour toutes les cases hors-base, évaluer la quantité $\Delta z = c_{ij} - u_i - v_j$.

c) La solution de base sera optimale si tous les $\Delta z \geq 0$.

d) Sinon, choisir la case qui minimise la valeur de $\Delta z < 0$ et recommencer le processus.

Appliquons cette démarche à partir de la la solution fournie par la méthode du coin nord-ouest. Nous avons déjà calculer les coûts duaux. Il suffit d'ajouter le valeurs (entre parenthèse) $\Delta z = c_{ij} - u_i - v_j$ pour les cases hors-base

400 $\boxed{147}$	50 $\boxed{121}$	(274) $\boxed{344}$	(754) $\boxed{552}$	450	$u_1 = 0$
(62) $\boxed{241}$	400 $\boxed{153}$	50 $\boxed{102}$	(482) $\boxed{312}$	450	$u_2 = 32$
(-183) $\boxed{451}$	(-244) $\boxed{364}$	500 $\boxed{557}$	250 $\boxed{285}$	750	$u_3 = 487$
400	450	550	250	1650	
$v_1 = 147$	$v_2 = 121$	$v_3 = 70$	$v_4 = -202$		

Suivant cette approche, c'est bien la case $(3,2)$ qui diminuer le plus rapidement la fonction objective z. Autrement dit, la solution de base calculée avec la valeur de $\theta = 400$ est bien celle fournie par l'algorithme.

Poursuivons les calculs à partir de cette étape. On doit mettre à jour les coûts duaux avec la nouvelle base. On obtient le tableau

400 $\boxed{147}$	50 $\boxed{121}$	(+) $\boxed{344}$	(+) $\boxed{552}$	450	$u_1 = 0$
(+) $\boxed{241}$	(+) $\boxed{153}$	450 $\boxed{102}$	(+) $\boxed{312}$	450	$u_2 = -212$
(+) $\boxed{451}$	400 $\boxed{364}$	100 $\boxed{557}$	250 $\boxed{285}$	750	$u_3 = 243$
400	450	550	250	1650	
$v_1 = 147$	$v_2 = 121$	$v_3 = 314$	$v_4 = 42$		

qui montre qu'il est optimal. Donc la solution optimale sera

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	400	50			450
S_2			450		450
S_3		400	100	250	750
	400	450	550	250	

avec $z = 383,300$ comme valeur minimale.

Exemple 6.3.1 Considérons le problème de transport suivant les notations adoptées précédemment

	D_1	D_2	D_3	
S_1	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$	$\boxed{6}$	100
S_2	$\boxed{7}$	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$	80
S_3	$\boxed{13}$	$\boxed{12}$	$\boxed{8}$	45
	90	60	75	225

a) On démarre avec la solution du coin nord-ouest et on évalue les coûts duaux.

	D_1	D_2	D_3		
S_1	90 $\boxed{8}$	10 $\boxed{10}$	(-9) $\boxed{6}$	100	$u_1 = 0$
S_2	(5) $\boxed{7}$	50 $\boxed{4}$	30 $\boxed{9}$	80	$u_2 = -6$
S_3	(12) $\boxed{13}$	(9) $\boxed{12}$	45 $\boxed{8}$	45	$u_3 = -7$
	90	60	75	225	
	$v_1 = 8$	$v_2 = 10$	$v_3 = 15$		

b) La case $(1,3)$ entre dans la base. On doit trouver celle qui quitte.

	D_1	D_2	D_3	
S_1	90	$10-\theta$	θ	100
S_2		$50+\theta$	$30-\theta$	80
S_3			45	45
	90	60	75	225

Donc $\theta = 10$ ce qui conduit à la solution de base

	D_1	D_2	D_3	
S_1	90		10	100
S_2		60	20	80
S_3			45	45
	90	60	75	225

Les coûts duaux

	D_1	D_2	D_3		
S_1	90 $\boxed{8}$	(9) $\boxed{10}$	10 $\boxed{6}$	100	$u_1 = 0$
S_2	(-4) $\boxed{7}$	60 $\boxed{4}$	20 $\boxed{9}$	80	$u_2 = 3$
S_3	(2) $\boxed{13}$	(8) $\boxed{12}$	45 $\boxed{8}$	45	$u_3 = 3$
	90	60	75	225	
	$v_1 = 8$	$v_2 = 1$	$v_3 = 6$		

c) La case $(2, 1)$ entre dans la base. On doit trouver celle qui quitte.

	D_1	D_2	D_3	
S_1	$90 - \theta$		$10 + \theta$	100
S_2	θ	60	$20 - \theta$	80
S_3			45	45
	90	60	75	225

Donc $\theta = 20$ ce qui conduit à la solution de base

	D_1	D_2	D_3	
S_1	70		30	100
S_2	20	60		80
S_3			45	45
	90	60	75	225

Les coûts duaux

	D_1	D_2	D_3		
S_1	70 $\boxed{8}$	(+) $\boxed{10}$	30 $\boxed{6}$	100	$u_1 = 0$
S_2	20 $\boxed{7}$	60 $\boxed{4}$	(+) $\boxed{9}$	80	$u_2 = -1$
S_3	(+) $\boxed{13}$	(+) $\boxed{12}$	45 $\boxed{8}$	45	$u_3 = 2$
	90	60	75	225	
	$v_1 = 8$	$v_2 = 5$	$v_3 = 6$		

Ce tableau est optimal et la valeur de $z = 1480$.

6.4 Autres types de problèmes de transport

6.4.1 Cas où l'offre dépasse la demande

Il s'agit du cas :

$$\min z = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

sous les contraintes

$$\begin{array}{lll} \text{Offre :} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i & \forall i = 1, 2, \ldots, m, \\ \text{Demande :} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & \forall j = 1, 2, \ldots, n, \\ \text{Positivité :} & x_{ij} \geq 0. & \end{array}$$

avec l'hypothèse que l'offre dépasse la demande

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Dans ce cas, il suffit d'ajouter une destination fictive et de ramener le problème au cas traité précédemment. On notera par D_0 la nouvelle destination fictive. L'idé est d'envoyer toute le surplus des sources à D_0. Ainsi on écrit

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{i0} = a_i \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, m.$$

avec $x_{i0} \geq 0$ qui représente le surplus de la source i.

Il reste à préciser le choix de b_0

$$b_0 = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \geq 0$$

Par construction, on aura bien

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=0}^{n} b_j.$$

On choisit évidemment $c_{i0} = 0$ car la destination est fictive.

6.4.2 Problème d'affectation

Il s'agit de la classe de problèmes qui traite des questions d'affectation de tâches parmi un groupe d'individus. On supposera qu'il y a autant de personnes que de tâches à distribuer. D'autre variantes sont aussi possibles.
Ce problème peut s'écrire sous la forme d'un problème de transport. On introduit les notations suivantes :

$$c_{ij} = \text{le coût de formation, la préférence, l'expertise, etc}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la personne } i \text{ est assignée à la tâche } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par conséquent, il s'agira de minimiser (ou de maximiser) la fonction objective

$$z = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

sous les contraintes

- On alloue une seule tâche à une personne : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n,$
- Toutes les tâches sont distribuées : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, n,$
- $x_{ij} = 0$ ou 1.

On notera que la condition $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ est respectée car $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} 1 = n = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Fort heureusement, nous n'avons pas besoin de résoudre ce problème en exigeant que les variables soient entières. Ceci résulte du théorème fondamental des problèmes de transport.