Hiver 2013

MAT-2920 : recherche opérationnelle
exercices – série 1

1. On suppose que la matrice A possède une ligne dont les entrées sont strictement positives. Si on note par i l'indice de cette ligne, on a que $a_{ij} > 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots n$. De plus pour le même indice, on suppose que $b_i > 0$.

   (a) Si l'ensemble $K = \{x \geq 0 \mid Ax = b\} \neq \emptyset$, montrer que l'ensemble K est borné dans $\mathbb{R}^n$.

   (b) Sous l'hypothèse que $K \neq \emptyset$, montrer que les deux problèmes

   $$\max_{x \in K} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad \text{ou} \qquad \min_{x \in K} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

   admettent des solutions.

   (c) Sous l'hypothèse supplémentaire que $b \geq 0$, montrer que les deux problèmes

   $$\begin{array}{l} \max \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{l} \min \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

   admettent des solutions.

2. Vérifier l'énoncé du numéro 1 (c) en résolvant, à l'aide de Matlab, le problème suivant

   $$\begin{array}{l} \min \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

   à l'aide des données:

   ```
   A = [rand(1,n); randn(m-1,n)];
   b = [1;rand(m-1,1)];
   c = randn(n,1);
   ```

   Explorer avec différentes valeurs de m, n avec $m < n = 10, 100, \dots 1000$.

3. Répondre aux questions suivantes.

(a) Pour un problème d'optimisation linéaire à deux variables, montrer qu'il y a au plus deux sommets de la région admissible qui sont optimaux.

(b) Construire un exemple d'un problème d'optimisation linéaire à trois variables dont la solution optimale est atteinte en plus que 3 sommets de la région admissible.

4. Considérons le problème suivant:

$$\min z = -2x_1 - x_2$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq & 5, \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 12, \\ x_1 & \leq & 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

(a) Transformer ce problème en un problème de maximisation.

(b) Résoudre le problème par la méthode graphique.

5. Considérons le problème suivant:

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 & \leq & 4, \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 6, \\ -x_1 + 6x_2 & \geq & 6, \\ x_1, x_2 & \geq & 0. \end{cases}$$

(a) Représenter graphiquement les contraintes et résoudre par la méthode graphique.

(b) Déterminer par la même méthode la solution du problème de minimisation

$$\min z = 4x_1 + 3x_2.$$

avec les mêmes contraintes.

6. Deux concessionnaires automobiles passent des commandes de voitures neuves auprès de la compagnie. Les demandes sont fournies par le tableau suivant:

	nombre d'autos
concessionnaire I	40
concessionnaire II	60

La compagnie possède 2 usines situées dans des villes différentes. La première usine a en stock 80 automobiles tandis que la deuxième dispose de 100 automobiles. Les coûts de transport pour acheminer une automobile vers les concessionnaires sont donnés par le tableau suivant:

	concessionnaire I	concessionnaire II
usine I	\$20	\$30
usine II	\$30	\$50

Il s'agit de déterminer le nombre de voitures expédiées des usines vers les concessionnaires tout en minimisant les coûts de transport.

(a) Mettre ce problème sous forme mathématique, en identifiant clairement les variables du problème.

(b) Résoudre le problème ci-dessus par la méthode graphique.

7. (a) Résoudre par la méthode graphique le problème suivant:

$$\max z = x_1 + x_2$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & \leq & 2, \\ x_1 + 3x_2 & \leq & 3, \\ x_1, x_2 & \geq & 0. \end{cases}$$

(b) Si on introduit les variables d'écarts x_3 et x_4, le problème ci-dessus est équivalent à résoudre

$$\max z = x_1 + x_2$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 & = & 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0. \end{cases}$$

Déduire de (a) la solution optimale (x_1, x_2, x_3, x_4).

(c) Résoudre de nouveau par la méthode graphique le problème suivant:

$$\min z = 2x_1 + 3x_2$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & \geq & 1, \\ x_1 + 3x_2 & \geq & 1, \\ x_1, x_2 & \geq & 0. \end{cases}$$

(d) Quels liens faites-vous entre les solutions de (b) et (c)?

8. On reprend le même problème que celui du numéro 5 mais avec la fonction objective

$$z = cx_1 + 3x_2$$

qui dépend du paramètre $c \in \mathbb{R}$.

   (a) En traitant c comme un paramètr (et non comme une variable), déterminer la solution optimale qui maximise z en fonction de la constante $c \in \mathbb{R}$.

   (b) Refaire (a) en cherchant la solution optimale qui minimise z en fonction du paramètre c.

9. L'entreprise Mecanex fabrique trois produits P_1, P_2 et P_3 et pour ce faire utilise trois centres de fabrication. Les temps opératoires, en heures par unité, à chaque centre de fabrication sont les suivants:

	P_1	P_2	P_3	temps disponible
Centre I	4	2	4	80 heures
Centre II	2	2	3	50 heures
Centre III	1	3	2	40 heures

La contribution unitaire de chaque produit au bénéfice est la suivante: \$5 pour P_1, \$3 pour P_2 et \$4 pour P_3

   (a) Formuler le problème sous forme mathématique

$$\begin{cases} \max z = c^t x, \\ Ax \geq 0, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

   (b) Déterminer à l'aide de Matlab les quantités de P_1, P_2, P_3 à fabriquer pour obtenir le meilleur bénéfice possible. Quel est le bénéfice maximum? Est-ce que le centre II est pleinement utilisé?