Hiver 2015

MAT-2920 : recherche opérationnelle
exercices – série 4

1. Résoudre par la méthode des deux phases.

   (a)

$$\begin{cases} \min z = x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

   (b)

$$\begin{cases} \min z = x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

   (c)

$$\begin{cases} \max z = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. Supposons que $\{x_k\}_{k=1}^p$ est un ensemble fini de p solutions optimales du problème

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ Ax \leq b & \\ x \geq 0 & \end{array}$$

   où A est une matrice de format $m \times n$, b un vecteur de taille m et c un vecteur de taille n. On notera par α la valeur minimale commune des solutions optimales, i.e. $\min c^t x_k = \alpha$. Montrer que toutes les combinaisons convexes $x = \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k$ avec $\lambda_k \geq 0$ et $\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1$ est aussi une solution optimale.

3. Trouver toutes les solutions optimales de

$$\max z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

   avec les contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 6x_3 & \leq & 60, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq & 2, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \leq & 24, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

4. Résoudre le problème de Diète vu en classe à l'aide de la méthode des 2 phases:

$$\min z = 340x_1 + 2400x_2 + 560x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1100, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1400, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 1500, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

5. Considérons le problème:

$$\min z = -3/4\ x_1 + 150x_2 - 1/50\ x_3 + 6x_4$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} x_1/4 - 60x_2 - x_3/25 + 9x_4 & \leq & 0, \\ x_1/2 - 90x_2 - x_3/50 + 3x_4 & \leq & 0, \\ x_3 & \leq & 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

   (a) En appliquant la stratégie usuelle du choix de pivot, résoudre par la méthode du simplexe. Qu'observez-vous?

   (b) Modifier la stratégie de pivot en utilisant la règle de Bland (voir notes de cours) et résoudre de nouveau.

6. Considérons le problème suivant qui possède une variable (x_3) de libre

$$\min z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 & \geq & -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 & \geq & 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

(a) Réécrire le problème ci-dessus sous la forme standard

$$\begin{array}{l} \min \quad z = c^t x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}$$

en introduisant des variables supplémentaires si nécessaire.

(b) Résoudre par la méthode des deux phases.

7. En ajoutant des variables artificielles, résoudre par la méthode des deux phases

$$\min z = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 3x_4 + x_5 & = & 17, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 & = & 7, \\ x_1, \ldots, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

8. Déterminer la consommation en grammes de chacun des aliments I, II et III, selon le tableau ci-dessous, pour satisfaire les besoins minimaux en vitamines A et B au moindre coût.

	aliment I	aliment II	aliment III	besoin minimal
Vitamine A	2	1	4	18
Vitamine B	1	2	3	24
Coût par gr.	1	3	4	

9. Résoudre le problème de programmation linéaire avec des bornes variables

$$\min z = -3x_1 - 2x_2$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & \leq & 10, \\ 5x_1 + 3x_2 & \leq & 27, \\ 2 \leq x_1 \leq 4, \\ 0 \leq x_2 \leq 5. \end{cases}$$