

MAT-3600 : Projet de fin d'études — H-15

Propositions de projets (mathématiques)

- **Professeur-consultant : Line Baribeau**

1-) *Géométrie projective*

À l'époque où Fermat et Descartes établissaient les bases de la géométrie analytique, qui permet d'étudier les courbes par le biais d'équations algébriques, Desargues travaillait à une nouvelle géométrie, la géométrie projective, où les notions de longueur ou de mesure d'angle sont inexistantes. À l'instar de la géométrie d'Euclide, cette dernière se veut synthétique, c'est-à-dire basée sur des constructions géométriques plutôt que sur des équations. L'introduction des coordonnées homogènes au XIX^e siècle est venue par la suite donner une approche analytique à la géométrie projective.

La géométrie projective est particulièrement bien adaptée à l'étude des coniques puisqu'on peut passer de l'une à une autre par une transformation appropriée.

Ce sujet classique faisait autrefois partie du cours de géométrie mais ne fait plus partie du curriculum standard, ce qui est regrettable étant donné qu'il s'agit d'une très jolie théorie. Dans ce projet, l'étudiant ou l'étudiante apprendra les bases de la géométrie projective, et présentera les preuves de résultats géométriques intéressants.

- **Professeur-consultant : Claude Bélisle**

2-) *Pile ou face*

Pierre et Marie jouent à pile ou face. Pierre obtient un point à chaque fois que *pile* survient et Marie obtient un point à chaque fois que *face* survient. Au début du jeu, Pierre et Marie ont 0 point. On fait un lancer à chaque unité de temps et on suppose que la pièce est équilibrée. À la longue, quelle est la proportion de temps pour laquelle Pierre est en avance? Quelle est la proportion de temps pour laquelle Pierre et Marie sont à égalité? Si on pose $S_n = P_n - M_n$, où P_n et M_n dénotent respectivement le nombre de points de Pierre et le nombre de points de Marie après n lancers de la pièce, alors les questions précédentes peuvent être formulées de la façon suivante :

1. Que peut-on dire de la proportion de temps

$$\frac{U_n}{n} = \frac{\text{Cardinal}(\{k \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \text{ tel que } S_k > 0\})}{n} ?$$

2. Que peut-on dire de la proportion de temps

$$\frac{V_n}{n} = \frac{\text{Cardinal}(\{k \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \text{ tel que } S_k = 0\})}{n} ?$$

Le projet portera sur ce genre de question. En particulier, on obtiendra un résultat surprenant de Paul Lévy concernant la proportion U_n/n et un résultat célèbre de Kallianpur et Robbins concernant la variable aléatoire V_n .

3-) *Les processus de ramifications*

En 1875, Galton et Watson ont publié un article dans lequel ils s'intéressent à la probabilité de survie des noms de familles en Angleterre. Voici la version la plus simple du modèle considéré : on suppose que tous les garçons anglais appelés Smith auront, indépendamment les uns des autres et selon la même distribution de probabilités, un nombre aléatoire de garçons anglais appelés Smith. Sous ces conditions, quelle est la probabilité que le nom de famille Smith survivra si on démarre avec un seul Monsieur Smith ?

Le modèle de Galton et Watson est le plus simple exemple de ce qu'on appelle un processus de ramifications.

L'objectif du projet sera de faire un survol de certains aspects de la théorie des processus de ramifications et de leurs applications en biologie. L'outil principal pour y arriver sera la théorie des chaînes de Markov. Selon les intérêts de l'étudiant, le projet pourrait comprendre une composante informatique.

4-) *Au-delà du théorème limite central classique*

La version classique du théorème limite central nous dit que la distribution de la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées est à peu près normale. Plus précisément, si X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, avec espérance μ et variance σ^2 , et si $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, alors pour tout $a < b$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[a < \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq b \right] = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Le projet portera sur différentes généralisations du théorème limite central pour le cas où les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n ne sont pas indépendantes et identiquement distribuées. Deux cas particuliers seront considérés. D'abord on traitera le cas où X_1, X_2, \dots, X_n sont les résultats de n tirages sans remise à partir d'une urne contenant $n + m$ boules numérotées $1, 2, 3, \dots, n + m$. Dans ce cas, les variables sont identiquement distribuées mais elles ne sont pas indépendantes. Ensuite on traitera le cas où X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes avec $\mathbb{P}[X_i = -i] = \mathbb{P}[X_i = i] = 1/2$. Dans ce cas on a $S_n = \pm 1 \pm 2 \pm 3 \cdots \pm n$, les n signes (positif ou négatif) étant attribués selon les résultats de n lancers d'une pièce de monnaie. En statistique, ces deux cas particuliers apparaissent de façon naturelle dans certains problèmes de tests d'hypothèse. Une partie du projet portera sur ces applications.

- **Professeur-consultant : Hugo Chapdelaine**

- 6-) *Le groupe fondamental d'un espace*

Voici trois résultats classiques :

- (i) Un polynôme a au moins une racine complexe.
- (ii) Une fonction continue $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ admet au moins un point fixe.
- (iii) Une fonction continue $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ admet au moins deux points antipodaux qui ont la même image.

(\mathbb{D}^2 représente ici le disque fermé en dimension 2.)

Qu'on en commun ces trois résultats ? Chacun d'un se démontre facilement en utilisant la notion de groupe fondamental. Dans ce projet, l'étudiant sera amené à étudier la notion de groupe fondamental et à comprendre quelques-unes de ses applications.

- **Professeur-consultant : Anne-Sophie Charest**

- 7-) *Comprendre un grand jeu de données grâce aux vecteurs propres*

L'analyse en composantes principales (ACP) est une méthode d'analyse de données utilisée pour réduire la dimensionnalité de jeux de données avec plusieurs variables, et faire ressortir la structure sous-jacente aux données. Elle peut également servir à la compression d'images ou d'autres larges jeux de données. L'ACP se base sur une décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance.

Dans ce projet, l'étudiant(e) étudiera les principes mathématiques de l'ACP et son application à de grands jeux de données. Selon l'intérêt et les compétences de l'étudiant(e), il(elle) pourra notamment étudier l'ACP éparse et/ou l'ACP avec noyaux, et tester les méthodes sur un jeu de données.

Aucune notion statistique autre que le cours STT-4000 n'est nécessaire.

- 8-) *La régularisation pour résoudre un problème avec plus d'inconnues que d'équations*

Supposons que je veuille identifier les gènes responsables d'un certain cancer dans la population. Je réussis à obtenir une partie du code génétique de plusieurs individus, soit des milliers ou des millions de variables, et je note s'ils ont eu ce cancer ou pas. Prédire la probabilité d'avoir le cancer à partir du code génétique revient alors à tenter de résoudre un problème avec plus d'inconnues que d'équations ! On peut résoudre ce problème en utilisant une technique qu'on nomme la régularisation, qui pénalise pour la complexité de la solution.

Dans ce projet, l'étudiant(e) étudiera ces méthodes de régularisation, notamment l'algorithme LASSO. Il s'agira de comprendre les fondements mathématiques des différentes méthodes, l'effet du choix de la pénalisation, et l'algorithme informatique pour résoudre cette optimisation sous contrainte. Notez que l'exemple de génétique est utilisé pour présenter le problème, mais que le projet n'a pas à toucher aux données génétiques.

Avoir suivi le cours STT-2100 est un atout pour ce projet, mais n'est pas essentiel.

- **Professeur-consultant : Jean-Marie De Koninck**

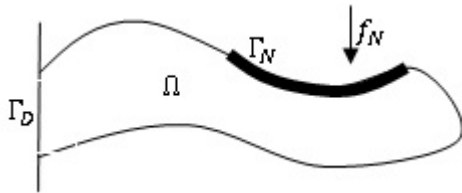
9-) *La valeur médiane du plus grand facteur premier d'un entier*

En 1974, Selfridge et Wunderlich démontraient que la valeur médiane $M(x)$ du plus grand facteur premier des entiers positifs $n \leq x$ est $x^{1/\sqrt{e}+o(1)}$ (lorsque $x \rightarrow \infty$). En 2013, Naslund améliorait ce résultat en démontrant que $M(x) = e^{(\gamma-1)/\sqrt{e}} x^{1/\sqrt{e}} (1 + O(1/\log x))$. En 1995, De Koninck démontrait que si Q est un ensemble de nombres premiers de densité $\delta \in (0, 1)$ satisfaisant certaines conditions de régularité, alors la valeur médiane $M(x; Q)$ de $P(n; Q) := \max\{p \mid n : p \in Q\}$ parmi les entiers positifs $n \leq x$ est $x^{\theta+o(1)}$, où $\theta = e^{-1/(2\delta)}$ si $\delta > 1/(2 \log 2)$ (avec une valeur distincte de θ lorsque $\delta \leq 1/(2 \log 2)$). Également, en 1995, De Koninck obtenait une estimation de la valeur médiane $M_2(n)$ du deuxième plus grand facteur premier de n , soit $M_2(n) = n^{0,21+o(1)}$ (lorsque $n \rightarrow \infty$). Le projet consistera à améliorer les estimations de $M(x; Q)$ et de $M_2(n)$ à la lumière des nouvelles techniques introduites par Naslund.

- **Professeur-consultant : Jean Deteix**

10-) *Conception optimale 3D*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, un domaine occupé par un corps élastique linéaire et isotrope subissant une force f_N appliquée sur une partie Γ_N de sa frontière. La déformation $u(x)$ causée par cette force est caractérisée par l'équation



$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\sigma(u)) &= 0 && \text{sur } \Omega \\ \sigma(u)n \cdot n &= f_N && \text{sur } \Gamma_N \quad (EL_1) \\ u(x) &= u_D && \text{sur } \Gamma_D \end{aligned}$$

où u_D est un déplacement imposé sur une partie Γ_D de la frontière. Un des grands « classiques » de la conception optimale consiste à déterminer la forme du domaine $\Omega \subseteq D$ pour maximiser la rigidité du corps élastique. Ce qui s'écrit

$$\min_{\Omega \subseteq D} \left\{ \int_{\Gamma_N} f_N u \, d\Gamma \mid u(x) \text{ solution de } (EL_1) \text{ et } \int_{\Omega} d\Omega \geq V_{min} \right\},$$

avec D un domaine de volume maximal. La méthode des éléments finis permet d'approximer la solution de (EL_1) . Pour cela on introduit un *maillage*, une approximation Ω_h de Ω par un assemblage de tétraèdres. Sur ce maillage on approximera les déplacements par une fonction $u_h(x)$ qui sera linéaire dans chacune de ces composantes et sur chaque tétraèdre. Cette approximation sera définie de manière unique par U_h , le vecteur des valeurs aux sommets du maillage qui est déterminé en résolvant un système matriciel :

$$K_h U_h = F_h.$$

En introduisant un maillage D_h pour D et, pour chacun des tétraèdres composant D_h , une fraction de volume ρ_i (indiquant la proportion de matériau dans chaque tétraèdre), on peut reformuler le problème de minimisation comme un problème d'optimisation en dimension finie avec contraintes :

$$\min_{\rho \in \mathbb{R}^n} \left\{ F_h \cdot U_h \mid K_h U_h = F_h, \rho \in [0, 1]^n, \sum \rho_i \geq V_{min} \right\}.$$

Dans ce projet, on abordera que légèrement la question de la discrétisation par éléments finis, et on propose de travailler sur le problème d'optimisation en dimension finie. Il s'agit

- d'une initiation à la méthode de l'adjoint pour le gradient de la fonction à minimiser ;
- de développer une version tridimensionnelle du programme Matlab de Sigmund ;
- d'aborder la question du filtrage des fractions de volume n'appartenant pas à $\{0, 1\}$.

Pour cela on s'appuiera essentiellement sur

J. Cea, *Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût.*

O. Sigmund, *A 99 line topology optimization code written in Matlab.*

• **Professeur-consultant : Nicolas Doyon**

11-) *Le bon bruit*

Un des rôles de nos neurones (et de ceux des autres animaux) est d'extraire de l'information utile des signaux sensoriels que nous recevons. Contrairement aux appareils électroniques, nos neurones doivent fonctionner dans un environnement bruyant où l'erreur et les signaux parasites sont omniprésents. Nous avons longtemps cru que le bruit et les possibilités d'erreur qui y sont associées ont un impact négatif sur le traitement de l'information. Nous savons aujourd'hui, notamment grâce aux travaux du professeur André Longtin sur le système auditif du criquet, qu'au contraire, le bruit peut être utilisé pour optimiser la quantité d'information reçue.

En utilisant des outils de la probabilité et de la théorie de l'information développée par Claude Shannon, l'étudiant apprendra comment quantifier l'information et construira un modèle neuronal simple qui lui permettra d'étudier les liens qui unissent signal, bruit et information.

12-) *Le plus grand facteur premier d'un entier*

La distribution du plus grand facteur premier des entiers est un problème important de la théorie des nombres. Le résultat suivant obtenu par Dickman est particulièrement élégant :

$$\#\{n < x : P(n) < x^{1/u}\} \sim x\rho(u),$$

où $P(n)$ est le plus grand facteur premier de n et où $\rho(u)$ est la fonction définie par $\rho(u) = 1$ pour $0 \leq u \leq 1$, et

$$u\rho' + \rho(u - 1) = 0$$

pour $u > 1$. Ce résultat peut être utilisé pour démontrer le théorème suivant dû à Paul Erdős :

$$\#\{n < x : P(n)^2 \mid n\} = x \exp(- (1 + o(1))\sqrt{\log x \log \log x}).$$

Malgré tout le travail effectué, la distribution du plus grand facteur premier recèle toujours plusieurs mystères.

Dans le cadre de son projet de fin d'étude, l'étudiant se familiarisera avec les grands résultats obtenus dans ce domaine et cherchera à en obtenir de nouveaux, notamment sur la distribution conjointe des plus grands facteurs premiers d'entiers consécutifs.

- **Professeur-consultant : André Fortin**

13-) *Modélisation des déplacements d'une population de bisons*

Dans ce projet, à partir d'une caractérisation par réseaux de la répartition des prés dans une région donnée, on utilisera des équations de réaction-diffusion pour étudier la dynamique des déplacements d'une population de bisons. On développera un modèle combinant la théorie des réseaux et des équations aux dérivées partielles pour tenter d'expliquer comment les individus se comportent et changent d'état (de résidents à voyageurs) au fil du temps. Le modèle tiendra compte des temps de résidence, du poids des liens entre les noeuds du réseau de même que d'une composante aléatoire du mouvement.

Ce projet est à la frontière entre la biologie et les mathématiques appliquées. L'étudiant(e) devra donc s'attendre à faire des lectures dans les deux domaines et à travailler en collaboration avec les deux superviseurs du projet, soit André Fortin (DMS) et Daniel Fortin (Département de biologie).

Références

[1] Ben-Zion Y., Cohen Y. & Shnerb N.M. (2010). Modeling epidemics dynamics on heterogenous networks. *J Theor Biol*, 264, 197-204.

[2] Courant S. & Fortin D. (2012). Time allocation of bison in meadow patches driven by potential energy gains and group size dynamics. *Oikos*, 121, 1163-1173.

[3] Dancose K., Fortin D. & Guo X.L. (2011). Mechanisms of functional connectivity : the case of free-ranging bison in a forest landscape. *Ecol Appl*, 21, 1871-1885.

[4] Fortin D., Dancose K., Courbin N., Harvey L., Babin J.-S., Courant S., Wilmshurst J.F. & Frandsen D. (2010). The use of ecological theory to guide bison management. In : *European bison conservation in Bia?owie?a Forest. Threats and prospects of the population development* (eds. Kowalczyk R, ?awreszuk D & Wójcik JM). Mammal Research Institute, Polish Academy of Sciences Bia?owie?a, Poland., pp. 201-210.

- [5] Fortin D., Fortin M.E., Beyer H.L., Duchesne T., Courant S. & Dancose K. (2009). Group-size-mediated habitat selection and group fusion-fission dynamics of bison under predation risk. *Ecology*, 90, 2480-2490.
- [6] Huang W. & Chen S.Y. (2011). Epidemic metapopulation model with traffic routing in scale-free networks. *Journal of Statistical Mechanics-Theory and Experiment*.
- [7] Nakao H. & Mikhailov A.S. (2010). Turing patterns in network-organized activator-inhibitor systems. *Nature Physics*, 6, 544-550.
- [8] Urban D. & Keitt T. (2001). Landscape connectivity : A graph-theoretic perspective. *Ecology*, 82, 1205-1218.
- [9] Xuan Q., Du F., Yu L. & Chen G.R. (2013). Reaction-diffusion processes and metapopulation models on duplex networks. *Phys Rev E*, 87.

- **Professeur-consultant : Alexandre Girouard**

14-) *Méthodes géométriques en cartographie*

La science de la cartographie a conduit de très longue date à la question de savoir représenter une portion de sphère sur un plan. Plusieurs solutions à ce problème ont été proposées, dès même *La Géographie* de Ptolémée au 2^e siècle de notre ère. Il est vite apparu qu'il est impossible de cartographier la Terre sans introduire des distorsions de la réalité. Néanmoins, il a fallu attendre le travail de Gauss pour bien comprendre le phénomène.

Dans ce travail, vous explorerez l'interaction entre le développement de la géométrie différentielle et celui de la cartographie. Dans ce but, vous étudierez les propriétés de certaines projections classiques : projection de Mercator, de Lambert et stéréographique. Vous vous intéresserez ensuite à la notion de courbure d'une surface, ce qui vous mènera naturellement vers le célèbre *Theorema Egregium* de Gauss.

Prérequis

Ce projet vous conviendra particulièrement bien si vous aimez à la fois la géométrie et l'analyse. Il serait idéal d'avoir suivi avec succès le cours MAT-3130 (*Courbes et surfaces*) pour entreprendre ce projet.

- **Professeur-consultant : Frédéric Gourdeau**

15-) *Géométries hyperbolique et sphérique*

Le projet sera basé sur le livre *Experiencing geometry : Euclidean and Non Euclidean with History* de David W. Henderson et Daina Tamina, et peut être considéré comme un projet ayant un fort contenu mathématique tout en comportant une démarche de réflexion en rapport avec l'enseignement des mathématiques.

Le livre présente les géométries sphérique et hyperboliques de manière assez complète, et son contenu contient les résultats classiques du domaine. Le travail est réalisé de manière à apporter un éclairage nouveau sur la géométrie dans le plan.

Sur le plan mathématique, il est utile de noter que le livre ne nécessite pas de notion préalable de géométrie différentielle; cependant, certaines notions de géométrie différentielle sont développées au besoin. Il y a donc complémentarité avec un cours de géométrie différentielle, mais aucun prérequis.

L'approche pédagogique retenue nécessitera un travail régulier et discipliné, et la prise de notes sous la forme d'un journal de bord personnel. Un étudiant qui choisira ce projet devra conjuguer un travail mathématique avec une réflexion pédagogique.

16-) *Théorie des nœuds*

La théorie des nœuds est un sujet moderne et intéressant, objet de recherches actuelles. Bien que je ne sois pas un spécialiste du domaine, il me fera plaisir de guider un étudiant motivé et autonome pour un projet en théorie des nœuds. On pourra toucher à des aspects pédagogiques selon l'intérêt de l'étudiant : le livre *Teaching and Learning of Knot Theory in School Mathematics* de Kawauchi, Akio (2012) pourrait alors être pertinent.

Note : Plusieurs livres sur le sujet sont disponibles à la bibliothèque, mais ils sont presque tous en anglais. Si cela pose une difficulté, il est mieux de prendre un autre sujet pour le projet de fin d'études.

• **Professeur-consultant : Robert Guénette**

17-) *Problèmes d'optimisation combinatoire dans les réseaux*

L'optimisation combinatoire est un domaine des mathématiques en pleine effervescence. Avec le développement de l'informatique, du Web, des grandes banques de données, des applications biomédicales, les réseaux sont partout autour de nous. L'optimisation de ces réseaux pose des défis considérables. La complexité du problème provient surtout de la grande taille de ces réseaux.

Il s'agira de choisir, en collaboration avec l'étudiant, un thème de l'optimisation combinatoire appliqué aux réseaux. Le traitement mathématique exigera une bonne connaissance de l'algèbre linéaire et d'un outil de programmation tel que Matlab.

18-) *Méthode de Ritz et calcul des modes de vibration d'une plaque*

En 1787, Ernst Chladni, qui était musicien et physicien, fut le premier à observer que lorsqu'on fait vibrer du sable sur une mince plaque de métal (par exemple à l'aide d'un violon), on obtient de remarquables figures qui sont maintenant connues sous le nom de figures de Chladni. Le mathématicien suisse Walter Ritz fut le premier à calculer numériquement les modes de vibration de ces figures en 1909. Aujourd'hui, à l'aide de Maple ou de Matlab, il est facile de reproduire les figures de Chladni.

Il s'agira d'apprendre la méthode de Ritz pour résoudre des problèmes aux limites, en particulier celui modélisant une plaque mince. Il est remarquable que Ritz a pu réussir à calculer ces modes sans l'aide d'ordinateur. En fait, cela montre l'efficacité de la méthode de Ritz, qui exige une bonne connaissance du calcul intégral et des théorèmes fondamentaux : Green, Gauss et Stokes. De plus, nous utiliserons Maple et Matlab pour les calculs numériques.

- **Professeur-consultant : Bernard R. Hodgson**

19-) *Les grandeurs selon Euclide*

La découverte de l'existence de « grandeurs incommensurables » par l'École pythagoricienne a provoqué un véritable remous dans le paysage mathématique de la Grèce antique. Il n'était pas du tout banal, pour les mathématiciens de l'époque, de voir comment il était possible de prendre en compte ces grandeurs « réelles » mais sans rapport avec l'unité de départ.

Le but de ce projet est d'examiner comment les grandeurs incommensurables — qui correspondent à nos irrationnels d'aujourd'hui — ont été intégrées dans la présentation du corpus mathématique grec tel que formulé dans les *Éléments* d'Euclide. Le travail consistera pour l'essentiel en une étude et une synthèse du texte original d'Euclide portant sur ce thème, ainsi que des observations des principaux commentateurs.

Le projet n'exige pas de savoir lire le grec ancien (!), mais il requiert une très bonne connaissance de l'anglais (et du français), ainsi qu'une bonne dose d'autonomie afin de pouvoir par soi-même étudier à fond de nombreux textes.

- **Professeur-consultant : Khader Khadraoui**

20-) *Sur quelques problèmes d'approximation de fonctions réelles avec les M-splines*

Les fonctions M-splines sont des polynômes par morceaux définis à partir d'un certain ordre, un entier généralement supérieur ou égal à 3, et une séquence de nœuds. La simplicité et en même temps la grande stabilité numérique de l'utilisation des M-splines ouvrent plusieurs perspectives pour les problèmes d'approximation des fonctions réelles vérifiant parfois certaines formes géométriques particulières. Nous étudions en détail dans ce projet la construction mathématique des fonctions M-splines et nous appliquerons ensuite la construction sur quelques exemples de combinaisons de contraintes locales de forme pour des fonctions réelles à approximer.

- **Professeur-consultant : Antonio Lei**

21-) *Le dernier théorème de Fermat et les courbes elliptiques modulaires*

Le célèbre dernier théorème de Fermat affirme qu'il n'existe pas de nombres entiers non nuls x , y et z tels que

$$x^n + y^n = z^n,$$

si n est un nombre entier ≥ 3 . Malgré la simplicité de l'énoncé, il a fallu à la communauté mathématique plus de 300 ans pour le démontrer. La démonstration par Andrew Wiles, publiée en 1995, rassemble un grand nombre d'outils puissants en théorie de nombres.

Dans ce projet, l'étudiant(e) explorera certains objets utilisés dans la démonstration de Wiles, notamment les courbes elliptiques et les formes modulaires. Le but est de comprendre le lien entre ces deux concepts mathématiques, à savoir, comprendre l'énoncé de la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil, qui constitue l'étape principale du travail de Wiles.

Ce projet pourrait être considéré comme une préparation pour une maîtrise en théorie algébrique des nombres. Il s'agit d'une introduction en douceur aux concepts et techniques utilisés dans la recherche aujourd'hui.

Références

- [1] Ben-Zion Y., Cohen Y. & Shnerb N.M. (2010). Modeling epidemics dynamics on heterogenous networks. *J Theor Biol*, 264, 197-204.
- [2] Bruinier J. H. and van der Geer G. *The 1-2-3 of Modular Forms : Lectures at a Summer School in Nordfjordeid, Norway*, Springer, 2008.
- [3] Cornell G., Silverman J. H. and Stevens G. *Modular Forms and Fermat's Last Theorem*, Springer, 2000.
- [4] Silverman J. H. *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer, 2009.

22-) *Les nombres p -adiques*

Soit p , un nombre premier. Il est possible de définir une métrique sur les nombres rationnels en mesurant la divisibilité du dénominateur et du numérateur d'un nombre rationnel par p . Cette métrique s'appelle *la métrique p -adique*. Elle se comporte très différemment de la métrique euclidienne et il y a beaucoup de résultats suprenants en analyse p -adique. Le but de ce projet est d'étudier le complété de la métrique p -adique et ses applications en théorie des nombres. En particulier, on se penchera sur un résultat important de Hensel qui nous permet d'étudier les solutions d'une équation diophantienne à l'aide des nombres p -adiques.

Ce projet permettra à l'étudiant(e) de se familiariser avec l'interaction entre l'algèbre, l'analyse et la théorie des nombres. La connaissance des matières de plusieurs cours de premier cycle y intervient.

Références

- [1] Gouvea F. Q. *p-adic Numbers : An Introduction*, Springer, 2003.
- [2] Koblitz N. *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*, Springer, 1996.

- **Professeur-consultant : Jean-Philippe Lessard**

- 23-) *Analyse non linéaire assistée par ordinateur pour l'étude des systèmes dynamiques*

Plusieurs phénomènes complexes de la biologie, de la chimie et de la physique peuvent se modéliser par des systèmes dynamiques. Un exemple classique d'un système dynamique est celui d'un système d'équations différentielles non linéaires. Une des grandes réalisations scientifiques du 17^e siècle fut d'ailleurs la découverte par Isaac Newton des lois du mouvement en 1687 dans son célèbre ouvrage *Principia Mathematica*. Depuis ce temps, une grande partie des mathématiques s'est consacrée à l'étude des équations différentielles. Initialement, certaines branches des mathématiques pures comme l'analyse fonctionnelle, la topologie algébrique et l'analyse non linéaire se sont développées grâce aux nombreux défis qu'a soulevé l'étude de ces équations. Or, malgré tous ces efforts, les méthodes théoriques nous permettant d'étudier ces équations non linéaires sont relativement limitées. Suite à ces difficultés notoires, et avec le développement fulgurant des ordinateurs depuis le milieu du 20^e siècle, les méthodes numériques sont devenues l'outil principal des scientifiques dans leur étude des systèmes dynamiques.

Dans ce projet de fin d'études, nous allons explorer un domaine récent des mathématiques, parfois appelé calcul rigoureux, qui se trouve à l'intersection des mathématiques pures et appliquées. Ce domaine relativement récent permet d'obtenir des démonstrations d'existence (et ce dans un sens mathématique rigoureux) de solutions de systèmes dynamiques non linéaires. Plus précisément, le but de ce projet de fin d'études est d'utiliser le calcul rigoureux pour étudier la Conjecture 3.2 du livre de Galaktionov et Svirshchevskii [1] concernant l'existence d'une solution périodique d'une équation différentielle analytique par morceaux. L'origine de cette conjecture provient de l'étude d'existence d'ondes progressives dans une équation aux dérivées partielles non linéaire. Pour étudier cette conjecture, nous ferons appel à la théorie récemment développée dans l'article [2]. Notez qu'une partie de ce projet de fin d'études consistera à élaborer des codes avec le logiciel MATLAB.

[1] Victor A. Galaktionov et Sergey R. Svirshchevskii, *Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics*. Applied Mathematics and Nonlinear Science Series. Chapman & Hall/CRC, 2007

[2] Marcio Gameiro, Jean-Philippe Lessard et Yann Ricaud. Rigorous numerics for piecewise-smooth systems : a functional analytic approach based on Chebyshev series, soumis, 2014.

• **Professeur-consultant : Claude Levesque**

24-) *Les formes quadratiques*

Par une forme quadratique (binaire) f sur \mathbb{Z} , nous entendons

$$f = f(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2 \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

En abrégé, on écrit $f = \langle a, b, c \rangle$. La *matrice associée* à f est $M_f = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}$ et le *discriminant* de f est $\Delta = \Delta_f = b^2 - 4ac = -4 \det(M_f)$. La forme quadratique f est dite *primitive* si $\text{PGCD}(a, b, c) = 1$, ce que nous supposerons toujours. De plus, f est dite *indéfinie* si $\Delta > 0$ et f est dite *définie* si $\Delta < 0$. Il s'avère que

$$f(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2 = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} M_f \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Soit

$$GL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} : r, s, t, u \in \mathbb{Z}, ru - st = \pm 1 \right\}$$

et soit

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} : r, s, t, u \in \mathbb{Z}, ru - st = 1 \right\}.$$

Dans ses *Disquisitiones arithmeticae*, Gauss a défini une *action* de la matrice $A = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ sur f de la façon suivante : $Af = f' = \langle a', b', c' \rangle$ où

$$M_{f'} = A^t M_f A = \begin{pmatrix} ar^2 + brt + ct^2 & ars + cut + \frac{1}{2}(ru + st)b \\ ars + cut + \frac{1}{2}(ru + st)b & as^2 + bsu + cu^2 \end{pmatrix},$$

A^t étant la transposée de A . Ceci l'a amené à définir une notion d'équivalence entre les formes quadratiques de

$$\mathcal{F}_\Delta = \{\text{Formes quadratiques de discriminant } \Delta\}.$$

La forme quadratique f est dite *équivalente au sens large* à g , en symboles $f \approx g$, s'il existe $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ tel que $g = Af$. La forme quadratique f est dite *équivalente au sens étroit* à g , en symboles $f \sim g$, s'il existe $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $g = Af$. On dit alors que $Cl(\Delta) := \mathcal{F}_\Delta / \approx$ est le *groupe de classes au sens large* de \mathcal{F}_Δ et que la cardinalité h_Δ de $Cl(\Delta)$ est le *nombre de classes au sens large* de \mathcal{F}_Δ . De plus, on dit que $Cl^+(\Delta) := \mathcal{F}_\Delta / \sim$ est le *groupe de classes au sens étroit* de \mathcal{F}_Δ et que la cardinalité h_Δ^+ de $Cl^+(\Delta)$ est le *nombre de classes au sens étroit* de \mathcal{F}_Δ . Gauss a effectivement exhibé les lois de composition de ces groupes.

Le but de ce projet de fin d'études est de prouver que $Cl(\Delta)$ et $Cl^+(\Delta)$ sont des groupes et ceci fera intervenir les *formes quadratiques réduites*. Plusieurs exemples concrets de ces groupes de classes seront donnés. Les volumes de D. Flath, J. Buchman, D. Buell et A. Faisant sont de bonnes références.

- **Professeur-consultant : Hassan Manouzi**

25-) *Équations différentielles stochastiques et méthode de séries de chaos de Wiener-Itô*

Le projet proposé porte sur la résolution des équations différentielles perturbées par un bruit blanc additif ou multiplicatif. Ces équations modélisent de nombreux phénomènes stochastiques en physique, photonique, finance, ... La méthode de résolution sera basée sur le développement de la solution en séries de Wiener-Itô.

- **Professeur-consultant : Javad Mashreghi**

26-) *La dérivée d'un produit de Blaschke fini*

Soit $\mathbb{D} = \{z : |z| \leq 1\}$, le disque unité ouvert, et \mathbb{T} , sa frontière. Supposons que $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$. Alors, l'application

$$B(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z}$$

s'appelle un produit de Blaschke fini. Voici quelques propriétés élémentaires de B :

- (i) $|B(z)| < 1$, $z \in \mathbb{D}$;
- (ii) $|B(z)| = 1$, $z \in \mathbb{T}$;
- (iii) $B(z) = 0$ si et seulement si $z \in \{z_1, \dots, z_n\}$;
- (iv) l'équation $B'(z) = 0$, $z \in \mathbb{D}$ a $n - 1$ racines, disons w_1, \dots, w_{n-1} ;
- (v) w_1, \dots, w_{n-1} sont dans l'enveloppe convexe de $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ (*théorème de Walsh*);
- (vi) l'équation $B'(z) = 0$, $z \in \mathbb{T}$, n'a aucune racine. De plus, on a

$$|B'(z)| = \sum_{k=1}^n \frac{1 - |z_k|^2}{|z - z_k|^2}, \quad (z \in \mathbb{T}). \quad (*)$$

Dans ce projet, on étudie le théorème de Walsh et ses applications, ainsi que la représentation (*).

- **Professeur-consultant : Jérémie Rostand**

27-) *Lemme de Sperner et applications*

Le lemme de Sperner est un analogue combinatoire au théorème du point fixe de Brouwer. Il possède des applications entre autres dans le calcul des points fixes, dans les algorithmes de calcul de racines et dans les problèmes de divisions équitables. On peut également l'utiliser pour démontrer les théorèmes de Brouwer et de Monsky.

L'objectif du projet est de démontrer la version générale du lemme de Sperner (en dimension n), d'en déduire les théorèmes de Brouwer et de Monsky et d'en explorer les applications. La théorie des graphes sera au centre du projet. Les notions de topologies vues en Analyse III seront également nécessaires.

- **Professeur-consultant : Jérôme Soucy**

28-) *Géométrie hyperbolique dans le plan complexe*

Pour ce projet, on propose à l'étudiant ou l'étudiante de développer deux modèles de géométrie hyperbolique se situant dans le plan complexe et qui ont été formalisés par le mathématicien français Henri Poincaré. Dans un premier temps, l'étudiant se familiarisera avec le modèle du demi-plan supérieur, qui sera développé en détails. On abordera plusieurs notions, entre autres celles de transformation de Möbius, de groupe de transformations, d'espace métrique et d'intégrale curviligne. On terminera en transposant ce modèle dans le disque unité, qui, en étant un ensemble borné, nous offre un portrait différent de la géométrie hyperbolique. L'aspect historique des modèles de géométrie menant au développement de la géométrie non euclidienne pourra aussi être étudié.