# L'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré

Bien que l'irrationalité de $\sqrt{2}$ soit un fait mathématique connu des Grecs de l'Antiquité, ce n'est pas en ces termes que ceux-ci s'exprimaient à cet égard — l'idée moderne de « nombre réel irrationnel » ne faisait pas partie, pourrait-on dire, de leur cadre conceptuel, ni de leur vocabulaire. S'intéressant plutôt au fait que des segments de droite donnés soient ou non *commensurables* [1] — c'est-à-dire commensurables entre eux, l'un par rapport à l'autre —, ils ont établi l'*incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré* : étant donné un carré de côté $c$ et de diagonale $d$, il n'y a pas de « commune mesure » à ces deux segments, c'est-à-dire il n'existe pas de « segment-unité » $u$ compris un nombre exact de fois autant dans $d$ que dans $c$ (et qui serait donc tel que $d = m \times u$ et $c = n \times u$ pour certains naturels $m$ et $n$). [2]

Les preuves que l'on présente quant au statut de $\sqrt{2}$ consistent habituellement à montrer que ce nombre ne peut pas être un rationnel — car si on avait au contraire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, avec $a$ et $b$ dans $\mathbb{N}$ et $b \neq 0$, alors telle ou telle contradiction s'ensuivrait. Il est cependant possible de démontrer que la diagonale et le côté du carré sont incommensurables en se plaçant dans un cadre géométrique, et c'est ce que propose le raisonnement qui suit. À noter que cette preuve ne se retrouve pas telle quelle dans les textes anciens. Elle est cependant présentée dans un manuel de mathématiques du 19e siècle — le célèbre *Algebra : An elementary text-book for the higher classes of secondary schools and for colleges* (1886), du mathématicien écossais George Chrystal (1851–1911)— et est tout à fait dans l'esprit des Grecs de l'Antiquité. On y utilise une méthode de raisonnement essentiellement équivalente à celle de la proposition 2 du Livre X des *Éléments* d'Euclide. [3]

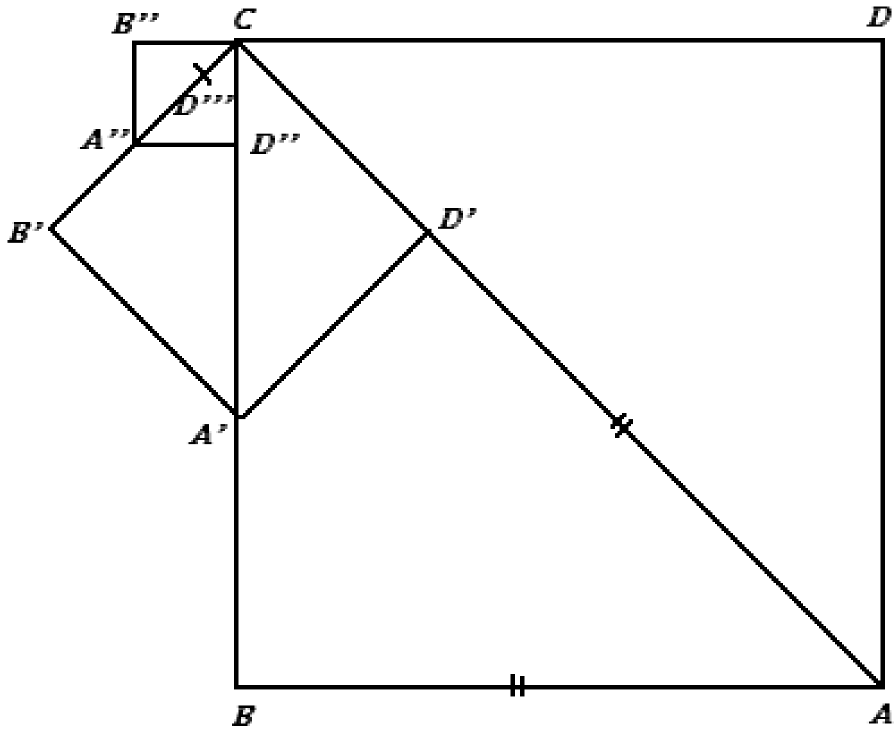
### Une construction géométrique préliminaire

Soit un carré $ABCD$ de côté $c = AB$ et de diagonale $d = AC$. Déterminons sur $AC$ un point $D'$ tel que $AD' \cong AB$ et traçons $A'D'$ perpendiculaire à la diagonale $AC$, avec $A'$ sur le côté $BC$.

1. Du latin *commensurabilis*, de *cum*, « avec » et *mensura*, « mesure ». Deux grandeurs commensurables ont donc une « commune mesure » : il existe alors une unité permettant de les « mesurer » toutes deux, c'est-à-dire de les exprimer par des nombres entiers en fonction de cette unité de mesure. Le mot *incommensurable* s'applique à des grandeurs qui ne peuvent se comparer par manque de mesure commune. Par extension, le mot incommensurable en est venu à désigner dans le langage courant ce qui est très grand, trop grand pour être mesuré, donc démesuré — ce qui est bien sûr un faux sens, mathématiquement parlant.

2. Pour faire une analogie avec le langage de l'arithmétique des nombres naturels, la notion de *mesure commune* à deux segments (de longueur entière) revient donc à celle de *diviseur commun* de deux naturels.

3. La proposition X.2 se lit : *Si, de deux grandeurs inégales proposées, la plus petite étant retranchée de la plus grande de façon réitérée et en alternance, le dernier reste ne mesure jamais le reste précédent, les grandeurs seront incommensurables.*




Observons que le triangle $A'CD'$ est non seulement rectangle, mais aussi isocèle (car l'angle $A'CD'$ vaut la moitié d'un angle droit). Nous sommes donc en présence d'un demi-carré.

Soit maintenant $B'$ tel que $A'B'CD'$ soit un carré et reprenons le processus précédent sur cette nouvelle figure. On a donc $D''$ sur $A'C$ tel que $A'D'' \cong A'B'$. Traçant alors $A''D''$ perpendiculaire à $A'C$, avec $A''$ sur $B'C$, il en résulte un nouveau carré $A''B''CD''$.

Cette construction peut être répétée indéfiniment, donnant à chaque fois, sur la diagonale des carrés successifs, une longueur pouvant être utilisée comme côté du carré suivant. Lors de ce processus, les côtés de ces carrés deviennent successivement de plus en plus petits,[4] mais sans jamais devenir nuls :

$$CD > CD' > CD'' > CD''' > \cdots.$$

Par construction, ces longueurs sont la différence entre la diagonale et le côté d'un carré donné. Ainsi,

$$\begin{array}{rcll} CD' & = & AC - AB & = \; d - c \\ CD'' & = & A'C - A'B' & \\ CD''' & = & A''C - A''B'' & \\ & \vdots & & \end{array}$$

4. Ce fait, passablement évident, pourrait se justifier comme suit. Observons en premier lieu que dans tout carré, la diagonale est inférieure au double du côté — on peut ici faire appel à l'inégalité triangulaire. On a donc $AC < 2 \times CD$. Or $AC = CD + CD'$, de sorte que $CD' < CD$.

**Preuve de l'incommensurabilité**

Supposons maintenant, pour fins de contradiction, que la diagonale et le côté du carré initial $ABCD$ soient commensurables. On a donc un segment commun $u$ tel que $AC = d = m \times u$ et $CD = AB = c = n \times u$, pour $m, n \in \mathbb{N}$ (et avec, bien sûr $m > n$). Il s'ensuit donc que

$$CD' = d - c = (m - n) \times u,$$

de sorte que le côté du carré $A'B'CD'$ est lui aussi un multiple de $u$, disons $CD' = n' \times u$, avec $n' = m - n$, un élément non nul de $\mathbb{N}$ et tel que $n > n'$.

Le passage du carré initial $ABCD$ au carré $A'B'CD'$ montre donc que nous sommes en présence d'une famille de carrés de plus en plus petits et de côtés respectifs

$$CD > CD' > CD'' > CD''' > \cdots,$$

chacun de ces côtés étant un multiple d'un même segment $u$ :

$$n \times u > n' \times u > n'' \times u > n''' \times u > \cdots.$$

La suite

$$n > n' > n'' > n''' > \cdots$$

serait donc une suite infinie strictement décroissante de naturels, ce qui est absurde.[5]

**Notes :**

- La démonstration qui précède n'est vraisemblablement pas celle qui était familière aux Grecs de l'Antiquité. Ainsi Aristote écrit dans l'*Organon* (*Les Premiers Analytiques*, I.23) : « On prouve, par exemple, l'incommensurabilité de la diagonale, par cette raison que les nombres impairs deviendraient égaux aux nombres pairs, si on posait la diagonale commensurable. » Cette remarque renvoie à une tout autre sorte d'argumentation à propos de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré.

- Voici une autre façon de conclure l'argument qui précède.

  Étant donné le carré $A'B'CD'$ de côté $CD' = (m - n) \times u$ (voir ci-haut), nous allons maintenant vérifier que la diagonale de ce même carré peut elle aussi s'exprimer comme un multiple de $u$. À cette fin, montrons tout d'abord que $A'B \cong A'D'$. En effet, comme le triangle $BAD'$ est par construction isocèle, il s'ensuit que deux des angles du triangle $BA'D'$ sont congruents et donc qu'il est lui aussi isocèle.[6] Or le triangle $A'CD'$ étant également isocèle (voir ci-haut), on en tire enfin que $A'B \cong CD'$.

5. Cet argument repose sur le même principe que la méthode dite de *descente infinie*, rendue célèbre par Pierre de Fermat (1601–1665) et qu'il a décrite dans une lettre datant d'août 1659 à Pierre de Carcavi (1600–1684). On y utilise le fait que l'ordre sur l'ensemble des naturels satisfait la propriété aujourd'hui connue sous le nom de « bon ordre » : tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément. Il n'est donc pas possible qu'une suite infinie de naturels soit strictement décroissante.

6. La congruence $A'B \cong A'D'$ peut être également justifiée en observant que les triangles $ABA'$ et $AD'A'$ sont congruents — cas de congruence de triangles rectangles.

La diagonale $A'C$ du carré $A'B'CD'$ vaut donc

$$\begin{aligned} A'C &= BC - A'B \\ &= AB - CD' \\ &= n \times u - (m - n) \times u \\ &= (2n - m) \times u, \end{aligned}$$

aussi un multiple de $u$ (on vérifie aisément que $2n > m$).

Posant, par commodité, $A'C = m' \times u$ et $CD' = n' \times u$, où $m'$ et $n'$ sont des naturels non nuls, nous sommes ainsi passés du carré initial $ABCD$ (dont on a supposé la diagonale et le côté commensurables) à un carré $A'B'CD'$ plus petit et lui aussi de diagonale et de côté commensurables, ces segments étant des multiples du même segment unité $u$ servant à engendrer $AC$ et $CD$. Il va de soi que cette observation vaudrait aussi pour tous les carrés successifs qu'introduit la construction géométrique précédente.

Nous sommes ainsi en présence d'une série de carrés de plus en plus petits, dont tous les côtés et diagonales sont des multiples d'un même « segment-unité » (de longueur finie et déterminée), ce qui est absurde. On en conclut que la diagonale et le côté du carré initial sont incommensurables.