

Exercices - Série 4

Lois conjointes et tableaux de fréquences à double entrée

Exercice 1

On tire simultanément deux jetons d'une urne contenant quatre jetons numérotés de 1 à 4. Soit X le plus petit et Y le plus grand des numéros obtenus.

- Déterminer la loi conjointe et les lois marginales de X et Y .
- Tracer le diagramme en mosaïque de la loi conjointe en conditionnant selon Y .
- X et Y sont-elles indépendantes?
- Déterminer la loi conditionnelle de Y lorsque le plus petit numéro tiré vaut 3.
- Déterminer l'espérance et l'écart-type de Y lorsque le plus petit numéro tiré vaut 3.
- Déterminer la loi conditionnelle de X lorsque le plus grand numéro tiré est pair.
- Calculer $Cov(X, Y)$.

Rappels :

- $E(X) = \sum_{i=1}^I x_i P(X = x_i)$
- $E(XY) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_i y_j P(X = x_i \text{ et } Y = y_j)$
- $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Exercice 2

On suppose que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes ayant pour lois de probabilités respectives :

x_i	1	2
$P(X = x_i)$	0.7	0.3

y_j	-2	5	8
$P(Y = y_j)$	0.3	0.5	0.2

- Déterminer la loi de probabilité conjointe de X et Y .
- Quelle est la probabilité que X et Y soient pairs?
- Quelle est la probabilité que X vaille 1 sachant que Y est positif?
- Calculer $Cov(X, Y)$.

Exercice 3

Vous pigez deux cartes d'un jeu standard de 52 cartes. Vous considérez les variables aléatoires suivantes :

$$\begin{aligned} X &= \text{nombre de cartes de pique (\spadesuit) pigées} \\ Y &= \text{nombre de rois pigés} \end{aligned}$$

- Déterminer la loi de probabilité conjointe de X et Y .
- X et Y sont-elles des variables indépendantes ?
- Votre ami a vu vos cartes avant vous, et vous donne un indice : *Il y a au moins une carte de pique*. Quelle est la probabilité que vous ayez pigé au moins un roi ?
- Pour mettre un peu de piquant dans l'expérience, vous établissez la règle suivante : Vous devrez payer 1\$ pour chaque carte de pique pigée, mais vous recevrez 2\$ pour chaque roi pigé. (Oui, vous avez bien compris : le roi de pique vous donne un gain net de 1\$.) Ce jeu est-il équitable ? Si oui, montrez-le. Sinon, quel montant un roi devrait-il vous faire gagner pour le jeu devienne équitable ?

Exercice 4

- Les fumeurs ont une probabilité de mourir du cancer du poumon 10 fois plus grande que les non-fumeurs.
- Ils ont une probabilité de mourir d'une maladie du coeur 1,7 fois plus grande que les non-fumeurs.
- 5 non-fumeurs sur 100 000 meurent du cancer du poumon.
- 170 non-fumeurs sur 100 000 meurent d'une maladie du coeur.

Le tabac est-il plus associé aux décès par cancer du poumon ou aux décès par maladies coronariennes ? En d'autres termes, un fumeur a-t-il plus de chances de mourir du cancer du poumon ou d'une maladie du coeur ?

Source : MOTULSKI, H.J., *Biostatistique. Une approche intuitive*, De Boeck, 2002, p. 100.

Exercice 5

Histoire vraie : Avant 1847, le taux de mortalité des mères à la maternité de l'hôpital général de Vienne était effarant, à un point tel que les femmes faisaient tout en leur pouvoir pour ne pas y accoucher. De plus, on savait (mais il était délicat de le dire tout haut) que les femmes accouchées par un médecin mouraient beaucoup plus souvent que celles accouchées par une sage-femme...

Voici le tableau croisé des fréquences de survie et de décès des mères sur une période de 8 ans.

1839 - 1847	Survie	Décès	Total
Médecins	18 215	1 989	20 204
Sages-femmes	17 100	691	17 791
Total	35 315	2 680	37 995

- Calculez le taux de mortalité des femmes selon le métier de leur accoucheur.
- Y a-t-il un lien statistique entre le type d'accoucheur et la survie ?

Puis la mort d'un médecin s'étant coupé un doigt lors d'une autopsie a poussé son collègue Ignaz Semmelweis à examiner les chiffres pour découvrir la cause de tant de décès et instaurer un changement de pratique. Le tableau ci-dessous montre les taux de mortalité après son intervention.

1848 - 1859	Survie	Décès	Total
Médecins	46 226	1 712	47 938
Sages-Femmes	39 522	1 248	40 770
Total	85 748	2 960	88 708

- Calculez le taux de mortalité des femmes selon le métier de leur accoucheur.
- Y a-t-il un lien statistique entre le type d'accoucheur et la survie ?

Pour connaître le changement instauré par le Docteur Semmelweiss qui fut à la source de cette amélioration, [lisez cet article](#), ou entrez son nom dans Google.

Exercice 6

(Walpole et Myers, *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*)

On veut comparer la capacité à vivre seul(e) des hommes et des femmes après le décès de leur conjoint(e). On mène une enquête auprès de 150 personnes veuves. Proposez une façon d'étudier la question à partir des données ci-dessous.

Population	Années vécues après le décès			Total
	< 5 ans	5 à 10 ans	> 10 ans	
Hommes (veufs)	25	42	33	100
Femmes (veuves)	19	20	11	50
Total	44	62	44	150

Exercice 7

On trouve dans le *British Medical Journal* un article analysant le succès de deux traitements contre les calculs rénaux (accumulations solides de minéraux dans les reins, communément appelées *pierres*), dont les taux de succès respectifs sont les suivants :

Traitement 1 : Chirurgie effractive (ouverte) 273/350 (78%)

Traitement 2 : Chirurgie percutanée (incision 1 cm) 289/350 (83%)

Or, lorsqu'on tient compte de la taille des calculs rénaux, on obtient les taux de succès respectifs suivants :

Calcul < 2 cm

Traitement 1 : 81/87 (93%)

Traitement 2 : 234/270 (83%)

Calcul \geq 2 cm

Traitement 1 : 192/263 (73%)

Traitement 2 : 55/80 (69%)

- Construire les tableaux de fréquences associés à ces trois situations.
- Remarquez-vous quelque chose qui semble anormal, ou contre-intuitif?
- Pouvez-vous apporter une explication à cet état de fait?

Article : www.bmj.com/content/309/6967/1480

Exercice 8

Vous en voulez plus ? Voici une liste d'exercices issus du livre de STT-1000* vous permettant d'approfondir votre maîtrise de ces sujets si vous en ressentez le besoin.

Lois conjointes de deux variables discrètes ou qualitatives :

Chapitre 4 : Numéros 4.1, 4.2, 4.5, 4.6, 4.7

Test d'indépendance de deux variables discrètes ou qualitatives :

Chapitre 11 : Numéros 11.31, 11.32, 11.33, 11.34

* Hines, W. W. *et al.*, Probabilités et statistique pour ingénieurs, 2^e éd., 2012, Chenelière Éducation.