Été-automne 2013
Solutions

L'évolution de glaciers

Compte tenu des données de l'énoncé, le volume de glace en Antarctique est

$$\sim 2 \times 14\,000\,000 = 28\,000\,000 \text{ km}^3,$$

ce qui représente

$$\sim 28\,000\,000 \times 0{,}9 = 25\,200\,000 \text{ km}^3 \text{ d'eau.}$$

Par ailleurs, puisque la surface de la terre est

$$\sim 4\pi(6\,371)^2 = 510\,064\,472 \text{ km}^2,$$

alors la surface des océans est

$$\sim 510\,064\,472 \times 0{,}7 = 357\,045\,130 \text{ km}^2.$$

Finalement, on divisant le volume total d'eau par la surface des océans, on obtient

$$\sim 0{,}070 \text{ km, soit 70 mètres.}$$

L-systèmes

Prouver que $a(n+1) = a(n) + (2^n) \times 8$.

L'itération 1 de la plante, S[-F][+F], comporte 9 instructions.

Pour passer à l'itération 2, nous devons retirer deux F et les remplacer par S[-F][+F].

Mathématiquement, nous avons

$$a(2) = 9 - 2 + 2 \times 9 = 25.$$

Pour passer à l'itération 3, nous devons retirer quatre F et les remplacer par S[-F][+F]. Le nombre de F à retirer pour passer à l'itération $n+1$ est donc 2^n. Ces F doivent être retirés de $a(2)$, puis remplacés par quatre S[-F][+F] de longueur 9.

Mathématiquement, nous avons

$$a(3) = a(2) - 2^2 + (2^2) \times 9.$$

Plus généralement,

$$a(n+1) = a(n) - 2^n + (2^n) \times 9.$$

En mettant en évidence 2^n, nous avons

$$a(n+1) = a(n) + (2^n) \times 8.$$

Prouver que $a(n) = 2^{n+3} - 7$.

En simplifiant $a(n+1) = a(n) + (2^n) \times 8$, nous obtenons

$$a(n+1) = a(n) + 2^{n+3}, \text{ car } 8 = 2^3.$$

Réécrivons-la de manière à avoir $a(n)$ dans le membre de gauche de l'équation

$$a(n) = a(n-1) + 2^{n+2}.$$

Nous pouvons développer cette équation:

$$\begin{aligned} a(n) &= a(n-2) + 2^{n+1} + 2^{n+2} \\ &= a(n-3) + 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} \\ &\ldots \\ &= 1 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}. \end{aligned}$$

Rajoutons les termes 2^1 et 2^2 manquants dans cette progression géométrique et retirons-les à la fin de l'expression

$$a(n) = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} - 2^1 - 2^2.$$

La somme des termes de 1 à 2^{n+2} est alors la somme des $n+2$ premiers termes d'une progression géométrique dont le premier terme est $a = 1$ et la raison est $r = 2$. Or, la somme des k premiers termes d'une telle progression est

$$S_k = \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r - 1}.$$

Dans le cas présent, on obtient

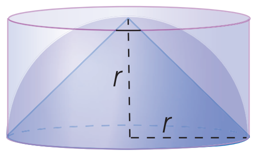
$$S_{n+2} = \frac{1(2^{n+3} - 1)}{2 - 1} = 2^{n+3} - 1,$$

d'où $a(n) = 2^{n+3} - 1 - 2^1 - 2^2 = 2^{n+3} - 7$.

Regard archimédien sur le cercle et la sphère : le clin d'oeil de Kepler

1. Simple comme 1-2-3

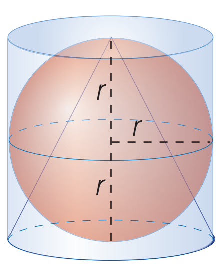
Le volume d'un cylindre circulaire de rayon r et de hauteur r est donné par $\pi r^2 \times r = \pi r^3$, tandis que celui du cône de mêmes rayon et hauteur est $\frac{1}{3}\pi r^3$. Il s'agit donc de trouver un solide dont le volume est $\frac{2}{3}\pi r^3$. Or, comme le volume d'une sphère de rayon r est égal à $\frac{4}{3}\pi r^3$, on peut tout simplement prendre comme solide intermédiaire une demi-sphère de rayon r.



Il en résulte qu'en additionnant les volumes d'une demi-sphère de rayon r et d'un cône circulaire de rayon et de hauteur r, on obtient le volume d'un cylindre circulaire de rayon et de hauteur r.

On notera que dans son traité *De la sphère et du cylindre*, Archimède démontre que le volume d'un cylindre circonscrit à une sphère est une fois et demie le volume de celle-ci (corollaire de la proposition 34). Autrement dit, le rapport du volume du cylindre à celui de la sphère inscrite est 3 : 2. Or, pour une sphère de rayon r, le cylindre circonscrit est alors de rayon r et de hauteur $2r$. En coupant en deux le cylindre et la sphère, on conserve le même rapport entre le « demi-cylindre » (c'est-à-dire le cylindre de hauteur r) et la demi-sphère.

Une autre famille de solides dont les volumes sont dans un rapport 1 : 2 : 3 est constituée d'un cône circulaire de rayon r et de hauteur $2r$, d'une sphère de rayon r et d'un cylindre circulaire de rayon r et de hauteur $2r$.



2. Surface de la sphère

a) Archimède cherche à montrer que la surface d'une sphère a une aire qui vaut quatre fois celle d'un de ses grands cercles (affirmation faite aux lignes 4-6 du texte d'Archimède). Autrement dit, la surface d'une sphère de rayon r a pour aire $4\pi r^2$. Ce résultat fait l'objet de la proposition 33 de son traité *De la sphère et du cylindre* : « L'aire de toute sphère est quadruple du plus grand de ses cercles. »[1]

On notera ici les mots utilisés par Archimède dans le texte cité à la *Section problèmes* : « J'ai conçu que la surface de toute sphère équivaut à quatre de ses plus grands cercles. » (Nous soulignons.) Archimède nous dit donc explicitement d'où lui est venue l'intuition de cette relation, après quoi il lui reste à la démontrer – ce qu'il fait à la proposition 33 du traité *De la sphère et du cylindre*.

b) Le premier résultat utilisé par Archimède est présenté dès le début du passage cité : *toute sphère a un volume quadruple de celui d'un cône circulaire dont le rayon et la hauteur sont égaux au rayon de la sphère*. Ce résultat a été établi rigoureusement par Archimède à la proposition 34 du traité *De la sphère et du cylindre*, où il est démontré de façon « géométrique », c'est-à-dire à l'aide d'une double preuve par contradiction.[2] Il est repris via une approche « mécanique » à la proposition 2 de *La méthode*, qui précède justement le passage cité d'Archimède.

Ce premier résultat peut se reformuler comme suit. Soit une sphère de rayon r, et soit un cône de hauteur r et dont la base est un grand cercle de la sphère. Alors le volume de la sphère vaut 4 fois celui du cône. Et ce fait se vérifie facilement si on se permet l'introduction des formules bien connues. La base du cône a en effet pour aire πr^2, de sorte que son volume est $\pi r^3/3$. Par ailleurs, la sphère, ayant un volume de $4\pi r^3/3$, vaut donc quatre fois le cône selon le volume.

1. Archimède, *De la sphère et du cylindre*. Voir Paul Ver Eecke, *Les œuvres complètes d'Archimède*, tome I (p. 63). Liège, Vaillant-Carmanne, 1960.

2. La méthode de *double preuve par contradiction* est discutée dans le texte « Regard archimédien sur le cercle » de Marie-France Dallaire et Bernard R. Hodgson, *Accromath*, vol. 8, hiver-printemps 2013, p. 35.

Le second résultat utilisé par Archimède est introduit à la toute fin du passage cité. Il s'agit alors d'une analogie audacieuse : tout comme le cercle équivaut, du point de vue de l'aire, à un triangle rectangle dont les cathètes sont le rayon et la circonférence du cercle, *de même la sphère, quant à son volume, est comme un cône dont la base a même aire que la surface de la sphère et dont la hauteur est la rayon de la sphère*. Autrement dit, Archimède fait un glissement depuis la formule $rC/2$ pour l'aire du cercle vers $rS/3$ pour le volume de la sphère. À noter qu'Archimède ne prétend pas avoir établi le résultat concernant le volume de la sphère : il dit bien qu'il en a eu l'intuition, sans révéler d'éléments venant la sous-tendre. Peut-être s'agissait-il d'une vision infinitésimale à la Kepler… Mais cette intuition lui offre une voie le menant à « concevoir », selon ses propres dires, le résultat à propos de la surface de la sphère en fonction d'un grand cercle (voir partie c).

c) Étant donné une sphère de rayon r et de surface S, Archimède a introduit deux cônes, tous deux de hauteur r :
   - un cône circulaire dont la base est un grand cercle de la sphère,
   - un cône dont la base a pour aire S.

   Or, le volume de la sphère vaut quatre fois celui du premier de ces cônes (*), et est égal à celui du second (**). Il s'ensuit donc que la surface S de la sphère vaut en aire quatre grands cercles.

   En formules, appelant V le volume de la sphère, on a d'une part $V = 4\pi r^3/3$ (par le résultat (*)) et d'autre part $V = rS/3$ (résultat (**)), d'où il suit $S = 4\pi r^2$.

Note 1 : La discussion qui précède est basée sur une remarque faisant suite à la proposition 2 du traité *La méthode*, Archimède travaillant alors à partir des deux résultats présentés à la partie b — l'un introduit semi-rigoureusement dans ce même traité et l'autre, purement intuitif. Archimède rebrasse ces résultats dans le cadre plus rigoureux du traité *De la sphère et du cylindre*, ceux-ci étant alors établis à l'aide de méthodes rencontrant les exigences de rigueur d'Archimède. La séquence de résultats utilisée par Archimède dans *De la sphère et du cylindre* va comme suit :

- la surface d'une sphère a pour aire le quadruple de celle d'un grand cercle (proposition 33);
- le volume d'une sphère vaut le quadruple de celui d'une cône ayant pour base un grand cercle et pour hauteur le rayon de la sphère (proposition 34);
- étant donné une sphère ainsi qu'un cylindre dont la base est un grand cercle de la sphère et la hauteur son diamètre, alors le volume du cylindre est une fois et demie celui de la sphère, et son aire, les bases comprises, une fois et demie celle de la surface de la sphère (corollaire de la proposition 34).

En formules, considérant une sphère de rayon r, de surface S et de volume V, Archimède s'intéresse donc successivement aux quatre résultats suivants :

$$S = 4\left(\pi r^2\right),\ V = 4\left(\frac{1}{3}\pi r^3\right),$$

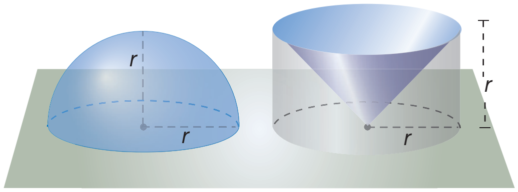
$$V_{cyl} = \frac{3}{2}V,\ S_{cyl} = \frac{3}{2}S,$$

où V_{cyl} et S_{cyl} représentent respectivement le volume et la surface du cylindre de rayon r et de hauteur $2r$ dont il est question dans le corollaire de la proposition 34. On se rappellera à cet égard, pour ce qui est des deux dernières égalités, que le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est donné par $\pi r^2 h$, et sa surface (totale), par $2\pi rh + 2\pi r^2$ (le premier terme de cette somme correspondant à l'aire latérale du cylindre et le second, à l'aire des deux bases circulaires). Appliquant ces formules au cylindre circonscrit à la sphère, on retrouve bien les relations énoncées par Archimède.

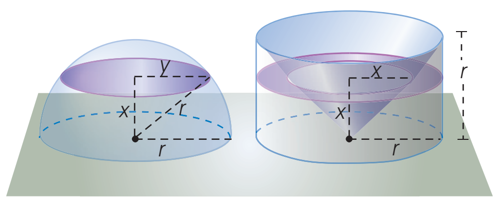
On aura observé au passage que la surface ($4\pi r^2$) d'une sphère de rayon r est égale à la surface latérale ($2\pi r \times 2r$) du cylindre qui lui est circonscrit.

Note 2 : Il est possible, par des considérations géométriques élémentaires assorties d'un appel au *principe de Cavalieri*, de justifier la formule exprimant l'aire d'une sphère en fonction de son rayon. La construction géométrique sur laquelle repose ce raisonnement est d'ailleurs très près de celle utilisée par Archimède à la proposition 2 du traité *La méthode*.

Soit à cet effet une demi-sphère de rayon r, ainsi qu'un cylindre de rayon r et de hauteur r. Plaçons à l'intérieur du cylindre un cône, également de rayon et de hauteur r. Nous allons montrer que le volume du cylindre est égal à la somme des volumes du cône et de la sphère (autrement dit, la sphère a même volume que la région entre le cylindre et le cône).



Appliquons à ces deux figures la « méthode des tranches ». À cet effet, coupons-les par un plan situé à une hauteur x. La section dans la demi-sphère est donc un cercle dont le rayon y dépend de la hauteur x. En appliquant la relation de Pythagore, on trouve immédiatement que $y^2 = r^2 - x^2$, de sorte que l'aire du cercle est $\pi(r^2 - x^2)$.



Passant au cylindre, intéressons-nous à la région entre celui-ci et le cône. On voit que la section déterminée par le plan de coupe est un anneau de rayon extérieur r et de rayon intérieur x. Cet anneau est donc d'aire $\pi r^2 - \pi x^2$, c'est-à-dire de même aire que le cercle dans la demi-sphère.

On se trouve donc en présence de deux solides de même hauteur (la demi-sphère et la région entre le cylindre et le cône) dont les sections prises à une hauteur donnée sont de même aire. Le *principe de Cavalieri* stipule précisément que ces solides ont alors même volume.

On a ainsi établi que

vol(demi-sphère) + vol(cône) = vol(cylindre).

Si on sait de plus que le cylindre a un volume triple de celui du cône, on en conclut que le volume de la demi-sphère représente les deux-tiers de celui du cylindre. (Il s'agit là de la relation abordée au problème 1 de la présente *Section problèmes*.)

Passant maintenant à une sphère de rayon r, on observe que la même relation existe entre son volume et celui d'un cylindre de rayon r et de hauteur $2r$, retrouvant ainsi l'un des résultats présentés au corollaire de la proposition 34 du traité *De la sphère et du cylindre*.

Note 3 : Avec les concepts et outils du calcul différentiel et intégral, on peut remplacer l'application du principe de Cavalieri, à la Note 2, par une intégrale. Le volume de la demi- sphère est alors obtenu en « faisant la somme » des aires de tous les cercles résultant d'une section par un plan de coupe (voir la demi-sphère à la gauche de la figure précédente). On a donc que le volume de la demi-sphère est égal à

$$\int_0^r \pi(r^2 - x^2)\,dx = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

On en tire immédiatement la formule usuelle pour le volume de la sphère, $V = 4\pi r^3/3$.

Les méthodes du calcul différentiel et intégral permettent également de retrouver la formule pour l'aire de la surface de la sphère. L'idée est de voir cette surface comme résultant de la rotation d'un demi-cercle autour d'une droite (l'axe des x, par exemple). Mais les techniques en jeu sont cette fois plus subtiles, et nous les laissons aux soins du lecteur intéressé.

NB : L'utilisation des techniques du calcul différentiel et intégral pour trouver tant le volume que la surface de la sphère est présentée dans la vidéo « DimensionSphère » réalisée par André Ross et accessible à l'url http://www.lozedion.com/complements-dinfo/calcul-differentiel-applications-sciences-humaines/videos-historiques/.

3. Passage à la limite

Regardons de plus près la longueur de chacun des chemins pour se rendre de A à B :

a) le long du grand demi-cercle de rayon 1 :
$$\pi \times 1 = \pi;$$
b) le long des deux demi-cercles de rayon 1/2 :
$$\pi \times \frac{1}{2} + \pi \times \frac{1}{2} = \pi;$$
c) le long des quatre demi-cercles de rayon 1/4 :
$$\pi \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \pi;$$

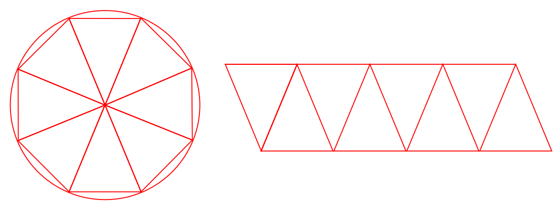
Plus généralement, le n^e trajet se fait le long d'un chemin formé de 2^{n-1} demi-cercles de rayon $1/\,2^{n-1}$, et donc de longueur π.

Nous sommes ainsi en présence d'une famille de courbes de longueur constante, toutes ayant la même longueur π. Une telle suite de nombres a donc pour « limite » π. Mais justement, en passant « à la limite », on semble se rapprocher « aussi près que l'on veut » du diamètre AB, qui est de longueur 2. En identifiant la *limite de la longueur des courbes* avec la *longueur de la courbe limite*, on en conclut que $\pi = 2$, ce qui est absurde.

Note : Le problème ici vient du fait que visuellement, les demi-cercles semblent « s'écraser » sur le diamètre AB, leur rayon devenant de plus en plus petit. Mais en un sens ce n'est là qu'apparence. Chacun des trajets se fait le long d'un chemin festonné, bosselé. Et quel que soit ce trajet, c'est-à-dire aussi grand que soit n, les bosses demeurent. Même si les points des demi-cercles se rapprochent « aussi près que l'on veut » des points du diamètre AB, cela se fait sans que les chemins ne « deviennent » pour autant le diamètre.

Mais alors pourquoi accepter que le « triangle festonné » devienne un véritable triangle rectangle, et le parallélogramme festonné, un rectangle (voir pp. 34 et 35)? Et plus généralement comment distinguer les situations où un tel argument « marche », et celles où il mène à un résultat absurde? Il s'agit là de questions difficiles, et pour y répondre adéquatement, il faut faire intervenir des considérations fines, tant sur les courbes que sur le processus de limite, abordées dans des cours de mathématiques supérieures.

Il est intéressant de lire les commentaires que font à ce sujet, à l'intention des enseignants du secondaire, André Boileau et Maurice Garançon dans un texte paru dans la revue Envol (publiée par le GRMS – Groupe des responsables en mathématiques au secondaire) :

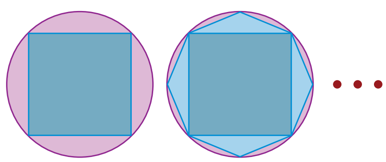
> Pourquoi sommes-nous portés à rejeter l'argument dans le second cas [*les chemins en demi-cercles*] et à l'accepter dans le premier [*les polygones festonnés*] ? Est-ce parce que nous savons d'avance que le résultat auquel il mène est vrai dans le premier cas et faux dans le second ? N'est-il pas dangereux d'utiliser devant les élèves un argument qui ne fonctionne pas toujours sans que l'on puisse dire pourquoi ?
>
> Peut-on trouver un argument alternatif dont on soit sûr qu'il soit correct ?
>
> En fait, à notre connaissance, il n'y a pas d'argument simple qui nous permette de montrer de façon élémentaire que le premier argument est « réparable » tandis que le second ne l'est pas.[1] (Si vous connaissiez un tel argument, nous serions très intéressés à en entendre parler.)
>
> On est donc ici face à la situation suivante : on dispose dans le premier cas d'une explication qui semble nous donner une intuition intéressante de la situation, mais qui d'un autre côté n'est pas entièrement satisfaisante. Que doit-on faire : l'utiliser quand même sans indiquer ses limitations; s'en servir tout en soulignant ses faiblesses; ou la bannir complètement?
>
> Il n'est pas facile de répondre à une telle question. Le plus simple serait de remplacer notre « explication problématique » par une autre qui l'est moins. Dans le cas présent, il est facile de faire appel à une argumentation moins problématique, basée sur approximation par des triangles plutôt que par des secteurs.
>
> 
>
> À première vue, il peut sembler que ça ne règle en rien notre problème, mais détrompez-vous. Le point crucial ici est le fait que la suite des périmètres des polygones réguliers inscrits tend vers la longueur de la circonférence du cercle : or ceci découle de la définition même de la longueur d'une courbe en général, et du cercle en particulier. Pour ce qui est du reste de l'argument, il est semblable à ce qu'on faisait avec les secteurs : il utilise encore le concept délicat de limite, mais de façon non problématique.

1. En fait, on doit se rappeler que la longueur des courbes est définie à l'aide d'approximations via des lignes brisées composées uniquement de segments de droite, ce qui n'est pas le cas des deux procédés ci-dessus. Une étude plus poussée nous montre que si l'on veut approcher la longueur d'une courbe C par les longueurs d'une suite de courbes C_n, il faut non seulement que les courbes C_n tendent vers la courbe C point par point, mais aussi que les suites des tangentes des courbes C_n en un point tendent « presque toujours » vers la tangente correspondante de la courbe C.

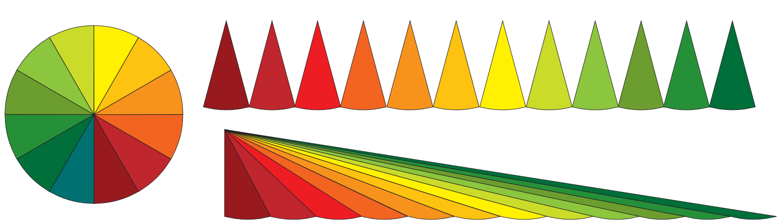
Extrait (pp. 43-44) tiré de : André Boileau et Maurice Garançon, « L'aire : une notion plus riche qu'il n'y paraît ». *Envol* 104 (1998) 37-44.

Ainsi donc rien n'est vraiment simple si on veut traiter ces questions avec rigueur. Il est utile ici de rappeler diverses situations où ces difficultés surgissent.

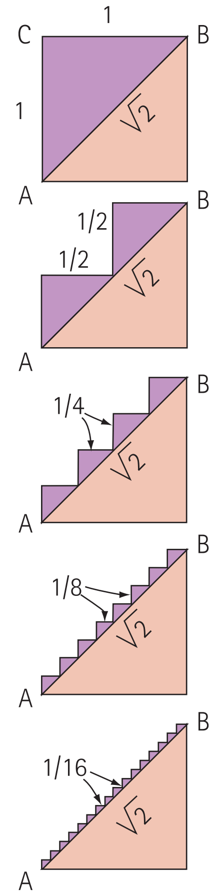
i) Étant donné un cercle, on accepte volontiers que, lorsque qu'on y trace successivement des polygones réguliers inscrits ou circonscrits dont le nombre de côtés devient de plus en plus grand, ces polygones peuvent s'approcher autant que l'on veut du cercle. Tant le périmètre que l'aire de ces polygones semblent respectivement « tendre vers » le périmètre et l'aire du cercle. Ce point de vue, raisonnable au demeurant, a été utilisé dans le texte « Regard archimédien sur le cercle : quand la circonférence prend une bouffée d'aire » (Marie-France Dallaire et Bernard R. Hodgson, *Accromath*, vol. 8, hiver-printemps 2013, pp. 32-37), dont voici une figure montrant des polygones inscrits dans un cercle (successivement le carré et l'octogone régulier, suggérant ainsi de façon générale le 2^n-gone régulier inscrit).



ii) Le point de vue de Kepler évoqué dans le présent texte est de décomposer un cercle en secteurs, puis d'aligner ceux-ci et de les transformer en un « triangle festonné ». Lorsque les secteurs sont en « nombre infini », on peut imaginer l'arc d'un tel secteur devenir comme un « petit » segment de droite (infiniment petit!), de sorte que le triangle à bosses devient un véritable triangle. Et ici encore cette vision tient la route et vient éventuellement alimenter notre intuition.



iii) Mais gare quand on se balade le long de dents de scie ou de demi-cercles : rien ne va plus! Ainsi la figure ci-contre, tirée du texte de Jean-Paul Delahaye intitulé « Preuves et certitudes » (*Accromath*, vol. 3, hiver-printemps 2008, pp. 22-25), nous montre quelques étapes dans une série de déplacements (de A vers B) avec des « escaliers » aux marches de plus en plus fines, divisant toujours girons et contremarches en deux parties égales.



On vérifie aisément que la longueur de chacun de ces trajets est toujours 2. Ainsi pour les trois premiers, on a :

$1 + 1 = 2;$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2;$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{4}=2.$

Mais en « passant à la limite », les escaliers se rapprochent de plus en plus de la diagonale, de sorte qu'on serait amené à conclure que $2=\sqrt{2}$. Absurde!

Cette situation paradoxale (tout comme celle présentée dans le présent problème) fait ressortir la nuance suivante : tandis que les polygones réguliers inscrits se transforment en un cercle (i), ou que les arcs des polygones festonnés deviennent de plus en plus lisses et se métamorphosent « à l'infini » en segments de droite (ii), les dents de scie et les demi-cercles demeurent « à l'infini » des dents de scie ou des demi-cercles.

Bref, tout comme pour la notion de *preuve visuelle* (voir le texte « Voyez-vous ce que je vois? » de Frédéric Gourdeau, *Accromath*, vol. 3, hiver-printemps 2008, pp. 18-19), nous sommes ici dans un contexte où il faut éduquer l'intuition afin de la rendre mieux aguerrie en vue de distinguer les situations où les passages à la limite se comportent raisonnablement, de celles où on se heurte à des conclusions paradoxales.